

数学演習第二 (演習第3回) 【解答例】

線形：ベクトル空間・部分空間 (2024 年 10 月 23 日実施)

演習問題

1 部分空間となる条件は、【要点】の〈部分空間の条件〉(i), (ii), (iii) を満たすことである。逆に言えば、部分空間とならないことを示すには条件 (i), (ii), (iii) のいずれかひとつを満たさない具体的な反例をあげればよい。

(1) $\mathbf{0} \notin W$ なので部分空間ではない。

(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ だが、その $1/2$ 倍は $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない。

(3) $\mathbf{0} \in W$. $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$ のとき、 $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = (x_1 + 2y_1 + 3z_1) +$

$(x_2 + 2y_2 + 3z_2) = 0$ なので、 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \in W$. また、 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}$ に

対し、 $kx + 2(ky) + 3(kz) = k(x + 2y + 3z) = 0$ より、 $k \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix} \in W$. 以上により条件

(i), (ii), (iii) の全てを満たすので、 W は部分空間。

(4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ であるが、その和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない。

(5) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ であるが、その和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない。

(6) (3) と同じようにして確認できるが、(3), (6) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間である (教科書 命題 15.4)。

(7) $\mathbf{0}$ が属していないので部分空間ではない。

(8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ とおけば、 $W = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{連立一次方程式 } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解 } \mathbf{x} \text{ を持つ}\}$ と表せる。

まず、 $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0} \in W$. 次に、 $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in W$ とすれば、 W の定義により $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}, A\mathbf{x}'_0 = \mathbf{b}'$ を満たす $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0 \in \mathbb{R}^3$ が存在する。このとき、

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'_0) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}'_0 = \mathbf{b} + \mathbf{b}', \quad A(k\mathbf{x}_0) = kA\mathbf{x}_0 = k\mathbf{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

であるから、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{b}'$ は解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ を持ち、 $A\mathbf{x} = k\mathbf{b}$ は解 $\mathbf{x} = k\mathbf{x}_0$ を持つ。よって、 $\mathbf{b} + \mathbf{b}', k\mathbf{b} \in W$ ($k \in \mathbb{R}$) が示された。以上により、条件 (i), (ii), (iii) の全てを満たすので、 W は部分空間である。

2 (1) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right]$ より、 $\mathbf{v} \notin W, \mathbf{w} \in W$.

$$(2) \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -22 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -22 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \end{array} \right] \text{ より,}$$

$v \in W, w \in W$.

$$(3) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & 5 & 1 & b \\ 2 & 3 & 4 & c \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 10 & b-3a \\ 0 & -1 & 10 & c-2a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -10 & 3a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array} \right] \text{ より,}$$

$v \in W \Leftrightarrow a-b+c=0$.

$$(4) \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \text{ より,}$$

$v \in W, w \notin W$.

$$(5) \left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

より, $v \notin W, w \in W$.

- 3 (1) W_1 は直線 $y = \frac{2}{3}x$ (図 1). W_2 は直線 $y = -x$ (図 2). 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は 2 直線の交点の原点のみ (図 3). 和集合 $W_1 \cup W_2$ は 2 直線 $y = \frac{2}{3}x, y = -x$ の合併 (図 4). 和空間 $W_1 + W_2$ は平面全体 (図 5). $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルが W_1, W_2 に平行なベクトルの和で書けることは明らか (与えられたベクトルを対角線とし, W_1, W_2 に平行な辺をもつ平行四辺形を考えよ).

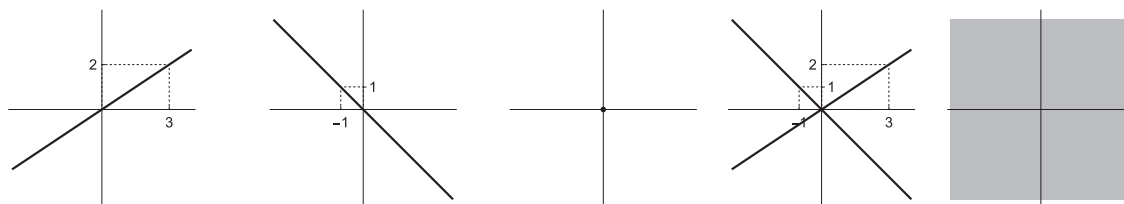


図 1. $W_1: y = \frac{2}{3}x$ 図 2. $W_2: y = -x$ 図 3. $W_1 \cap W_2$ 図 4. $W_1 \cup W_2$ 図 5. $W_1 + W_2$

また, $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^2$ の部分空間とならないことは, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 $W_1: y = \frac{2}{3}x$ 上にも直線 $W_2: y = -x$ 上にもないため, $W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる.

- (2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -5 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & -6 & -x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 2x+3y+z \end{array} \right]$ より, $2x+3y+z=0$. つまり, W_1 は平面 $2x+3y+z=0$ を表している. 別の見方をすると, $W_1 = \{c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ は, $\mathbb{R}^3$ 内で $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ によって張られる平面であるから, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとし, 原点を通る平面 $2x+3y+z=0$ となる.

同様に, W_2 についても, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 2 & x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 3x-2y+z \end{array} \right]$ より,

W_2 は平面 $3x-2y+z=0$. 外積 $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ からわかる.

共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ の解全体に一致するから,

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ から, $W_1 \cap W_2$ に属する元は $k \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ ($k \in \mathbb{R}$) となる. これは, 原点を通り, 方向ベクトル $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ の直線 $\frac{x}{5} = y = \frac{z}{-13}$ である. 別の見方をすると, 2つの平面 W_1, W_2 の交線は, W_1, W_2 の法線ベクトル $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4$ のいずれとも垂直であるから, $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -26 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし, 原点を通る直線 $\frac{x}{5} = y = \frac{z}{-13}$ となる.

また, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -5 & -1 & 2 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2x+3y+z \end{array} \right]$ から, $\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. なお, $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならないことは, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が平面 $W_1: 2x+3y+z=0$ 上にも平面 $W_2: 3x-2y+z=0$ 上にもないため, $W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる.

レポート課題

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 4z - 5y = 0 \\ 5x - 3z = 0 \\ 3y - 4x = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3t \\ 4t \\ 5t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\} \left(= \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \right)$ と表される. $t = 0$ とし, $\mathbf{0} \in W$. さらに, $t_1, t_2, k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{bmatrix} 3t_1 \\ 4t_1 \\ 5t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3t_2 \\ 4t_2 \\ 5t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(t_1 + t_2) \\ 4(t_1 + t_2) \\ 5(t_1 + t_2) \end{bmatrix}, \quad k \begin{bmatrix} 3t_1 \\ 4t_1 \\ 5t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(kt_1) \\ 4(kt_1) \\ 5(kt_1) \end{bmatrix} \in W.$$

よって, W は条件 (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

《別法 1》まず, $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$. 次に, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}$ とすれば,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(z_1 + z_2) - 5(y_1 + y_2) \\ 5(x_1 + x_2) - 3(z_1 + z_2) \\ 3(y_1 + y_2) - 4(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4z_1 - 5y_1 \\ 5x_1 - 3z_1 \\ 3y_1 - 4x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4z_2 - 5y_2 \\ 5x_2 - 3z_2 \\ 3y_2 - 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(kz_1) - 5(ky_1) \\ 5(kx_1) - 3(kz_1) \\ 3(ky_1) - 4(kx_1) \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} 4z_1 - 5y_1 \\ 5x_1 - 3z_1 \\ 3y_1 - 4x_1 \end{bmatrix} = k \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in W$. よって, W は条件 (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間である. (上の証明は, 外積に関する演算法則 $\mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y}$, $\mathbf{a} \times (k\mathbf{x}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{x})$ を示すことも含んでいるので, これを既知とするなら証明はずっと短くなる.)

《別法 2》 $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ と書ける. よって, W は同次連立一次方程式の解空間であるから部分空間となる (教科書 命題 15.4).

(2) $x = y = z = 0$ のとき $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \neq 1$ より, $\mathbf{0} \notin W$ となるので, W は部分空間ではない.

(3) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -3a+4 \\ 0 & 1 & -2a+2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2a+2 \\ 0 & 0 & -9a+10 \end{array} \right]$ より, $\mathbf{v} \in W$ となる a は $a = \frac{10}{9}$.

(4) • $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は, $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & -2 & y \\ 2 & 1 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & x+y \\ 0 & -1 & -2x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & x+y \\ 0 & 0 & -3x-y+z \end{array} \right]$ より, $3x + y - z = 0$. つまり, W_1 は平面 $3x + y - z = 0$ を表す. ($\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ を用いてもよい)

• W_2 についても, 同様に $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & x \\ 3 & 2 & y \\ 2 & 3 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & x \\ 1 & 1 & x+y \\ 2 & 3 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & 3x+2y \\ 0 & 1 & -2x-2y+z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & 3x+2y \\ 0 & 0 & -5x-4y+z \end{array} \right]$ より, W_2 は平面 $5x + 4y - z = 0$ を表す. ($\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4$ を用いてもよい)

• 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 5x + 4y - z = 0 \end{cases}$ の解全体に一致する. $\left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{array} \right]$ から, $W_1 \cap W_2$ に属する元は, $k \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ($k \in \mathbb{R}$) となる. よって, $W_1 \cap W_2$ は原点を通り, 方向ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ の直線 $\therefore \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$ である.

3 (2) の別解と同様に, 2 つの平面 W_1, W_2 の交線は $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし, 原点を通る直線と考えてもよい.

• 最後に, 和空間 $W_1 + W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$ についても触れておく. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & x \\ -1 & -2 & 3 & 2 & y \\ 2 & 1 & 2 & 3 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & -1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & -1 & 6 & 5 & -2x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & -1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -3x-y+z \end{array} \right]$ から, $\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. 一方, $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならない. 実際, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \in W_1 \cup W_2$ であるが, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ が平面 $W_1 : 3x + y - z = 0$ 上にも平面 $W_2 : 5x + 4y - z = 0$ 上にもないため, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \notin W_1 \cup W_2$ となる.