2024年度数学演習第二

演習第４回　微積：偏微分［１］（偏微分，合成関数の微分）

2024 年 10 月 30 日　実施

0　概要

多変数関数 (教科書 p.79)

▶ **定義**

x と y に値を与えると z の値が 1 つ決まるとき, z は x と y の関数であるといい, $z = f(x, y)$ などと書き表す.

例　$z = f(x, y) = x^2 - xy^2$ とすると, z は x, y の 2 変数関数である.

多変数関数の極限 (教科書 p.80)

▶ **定義**

関数 $f(x, y)$ を考える. xy 平面上の点 (x, y) を点 (a, b) にどのように近づけても関数 $f(x, y)$ の値が l に近づくとき, l を関数 $f(x, y)$ の点 (a, b) における極限 (値) といい, 1 変数関数の場合と同様に次のように記す:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l \tag{1}$$

◎極限が存在しないことを言うには, 近づき方により発散したり極限が異なったりすることを言えばよい.

例　$\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + 2y^2}$ の極限を調べる.

$x = 0$ (y 軸) に沿った極限は $\displaystyle \lim_{x=0,\, y\to 0} \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + 2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-2y^2}{2y^2} = -1.$

$y = 0$ (x 軸) に沿った極限は $\displaystyle \lim_{y=0,\, x\to 0} \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + 2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3.$

よって $x = 0$ と $y = 0$ に沿った極限が異なるので，極限は存在しない.

偏微分 (教科書 p.83)

▶ **定義**

関数 $f(x, y)$ を考える．このとき次を定義する.

1. $y = b$ と固定した 1 変数関数 $f(x, b)$ の点 $x = a$ における微分係数を，点 (a, b) における $f(x, y)$ の x に関する偏微分係数といい $f_x(a, b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ のように記す.
2. (a, b) に対して $f_x(a, b)$ を対応させる関数 $f_x(x, y)$ を $f(x, y)$ の x に関する偏導関数といい, $f_x(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ のように記す.
3. y に関する偏導関数も同様に定義する.

4. さらに, $f_x(x,y)$ 自身は (x,y) の関数なので, その x に関する偏導関数 $f_{xx}(x,y)(=(f_x)_x(x,y))$, y に関する偏導関数 $f_{xy}(x,y)(=(f_x)_y(x,y))$ が定義できる.
同様に $f_{yy}(x,y)\left(\text{又は } \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$, $f_{yx}(x,y)\left(\text{又は } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$ が定義できる.

▶ **定理**

2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, $f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ がともに連続ならば, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ である.

例　$f(x,y)=x^4-x^2y^2+y^3-2xy$ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2xy^2-2y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2x^2y+3y^2-2x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-2y^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4xy-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^2+6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4xy-2.$$

合成関数の導関数 (教科書 p.86)

次に 2 変数関数の合成関数の導関数について考えよう.

▶ **定理**

関数 $f(x,y)$, $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ を考える. このとき合成関数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ に関して次が成立する:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\psi}{dt}. \tag{2}$$

例　$z=\log(x^2+2y^2+1)$, $x=t^2$, $y=-t$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{2x}{x^2+2y^2+1}\cdot(2t)+\frac{4y}{x^2+2y^2+1}\cdot(-1)\\&=\frac{2t^2}{t^4+2t^2+1}\cdot(2t)+\frac{-4t}{t^4+2t^2+1}\cdot(-1)=\frac{4t(t^2+1)}{(t^2+1)^2}=\frac{4t}{t^2+1}.\end{aligned}$$

合成関数の偏導関数 (教科書 p.87)

次に 2 変数関数の合成関数の偏導関数について考える.

▶ **定理**

関数 $f(x,y)$, $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ を考える. このとき合成関数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ に関して次の関係が成立する.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v}. \tag{3}$$

例　$z=e^{xy}$, $x=-u^2v$, $y=u+v^2$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=ye^{xy}\cdot(-2uv)+xe^{xy}\cdot 1\\&=\left\{-u^2v-2uv(u+v^2)\right\}e^{-u^2v(u+v^2)}=-uv\left(3u+2v^2\right)e^{-u^2v(u+v^2)}.\end{aligned}$$

接平面 (教科書 p.89)

次に偏微分を用いて接平面を定義する.

▶ **定理**

曲面 $S : z = f(x,y)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,b,f(a,b))$ における S の接平面の方程式は次で与えられる:

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \tag{4}$$

▶ **定理**　曲面 S 上の点 $\mathrm{P}\,(a,b,f(a,b))$ を通り, 点 P における接平面に垂直な直線を, 曲面 S の点 P における法線という. P における法線の方程式は次で与えられる:

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1} \tag{5}$$

ヤコビアン (教科書 p.87)

後に学習する重積分で必要になるので, ヤコビアンについて紹介する.

▶ **定義**

関数 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ を考えたとき x,y の u,v に関するヤコビアンを次で定義する (ここに det は determinant, つまり行列式).

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{6}$$

例　$x = 2u - 3v + 1$, $y = 3u - v + 2$ とするときヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 7 \tag{7}$$

1　演習問題

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x,y)$ について, 1 次と 2 次の偏導関数 $(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy})$ を全て求めよ.

(1) $f(x,y) = x^2y - 3xy^2$　(2) $f(x,y) = \sqrt{2x^3 + y^2}$　(3) $f(x,y) = x^y$

(4) $f(x,y) = \cos(xy)$　(5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

$\boxed{2}$ $f(x,y)$ に 1 変数関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を合成した 1 変数関数 $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ に対し, (i) $g(t)$ を具体的に計算してから微分, (ii) 合成関数の微分公式 (2) を用いて $f(\varphi(t), \psi(t))$ のまま微分, の 2 通りを実行し, 一致することを確かめよ.

(1) $f(x,y) = xy^2 + y$,　$\varphi(t) = t^3$,　$\psi(t) = \dfrac{1}{t}$

(2) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$,　$\varphi(t) = \cos t$,　$\psi(t) = \sin t$

$\boxed{3}$ $f(x,y)$ に 2 変数関数 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ を合成した 2 変数関数 $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ に対して, (i) $g(u,v)$ を具体的に計算してから u で偏微分, (ii) 合成関数の微分公式 (3) を用いて $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ のまま u で偏微分, の 2 通りを実行し, 一致することを確かめよ.

(1) $f(x,y)=xy^3+x^2+y,\ \ \varphi(u,v)=u+v,\ \ \psi(u,v)=uv$

(2) $f(x,y)=x^2+y^2,\ \ \varphi(u,v)=\sin u\cos v,\ \ \psi(u,v)=\cos u\cos v$

$\boxed{4}$ 次の変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(1) $x=u\cos v,\ \ y=u\sin v$　　(2) $x+y=u,\ \ x-y=v$

$\boxed{5}$ 次の曲面の，与えられた点における接平面と法線の方程式を求めよ.

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$　$(1,1,\sqrt{2})$　　(2) $z=e^{x^2y-2xy^2}$　$(2,1,1)$

$\boxed{6}$ 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，3 種類の極限値

(a) $\displaystyle\lim_{y\to0}\Bigl(\lim_{x\to0}f(x,y)\Bigr)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\Bigl(\lim_{y\to0}f(x,y)\Bigr)$　　(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$

がそれぞれ存在するか否かを調べよ．つまり，存在すれば，その値を計算し，そうでなければ，その理由を述べよ.

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$　　(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　(4) $f(x,y)=\begin{cases}x\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) & (y\neq0)\\ 0 & (y=0)\end{cases}$

2　レポート課題

問 1　$f(x,y)=e^x\cos y$, $\varphi(t)=\log t$, $\psi(t)=\mathrm{Cos}^{-1}\,t$, $g(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$ に対して, (i) $g(t)$ を具体的に計算してから微分, (ii) 合成関数の微分公式を用いて $f(\varphi(t),\psi(t))$ を微分, の 2 通りを実行し, 一致することを確かめよ.

問 2　$f(x,y)=\sin(xy)$, $\varphi(u,v)=u+v$, $\psi(u,v)=uv$, $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ に対して, (i) $g(u,v)$ を具体的に計算してから v で偏微分, (ii) 合成関数の微分公式を用いて $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ のまま v で偏微分, の 2 通りを実行し, 一致することを確かめよ.

問 3　$x+2y=u$, $3x-y=v$ とするときヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

問 4　$z=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ の点 $\left(\sqrt{3},1,\dfrac{\pi}{6}\right)$ における接平面, 法線の方程式を求めよ.