数学演習第二（演習第5回）

線形：一次独立・一次従属, 基底と次元　2024 年 11 月 6 日

要点

〈1次独立・1次従属〉（**1次** は **一次** とも書く）

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が **1次独立**

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ に限る.

$\iff$ 同次連立1次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ のみをもつ.

$\iff$ $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} = k$

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が **1次従属**

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が1次独立でない. すなわち,
$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ 以外にも存在する.

$\iff$ 同次連立1次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ が非自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ をもつ.

$\iff$ $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} < k$

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が1次従属であるとき, 適当な $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ が成立するが, これを **非自明な1次関係式** という. 非自明な1次関係式は同次連立1次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ を解くことによって求められる.

〈基底と次元〉

- ベクトル空間 V の元の組 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ が V の **基底**

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ 次の2つの条件を満たすこと:

(i) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する. すなわち, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.
(ii) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は1次独立である.

$\iff$ 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ を満たす実数 $c_1, \ldots, c_n$ が一意的に存在.
(「存在する」が条件 (i) に, 「一意的に」が条件 (ii) に対応する.)

- ベクトル空間 V の基底の取り方は一意的ではないが, 基底をなすベクトルの個数は (有限個であれば) ただ1つに決まる. この個数をベクトル空間 V の **次元** といい, $\dim V$ で表す.

- $\mathbb{R}^n$ は n 次元なので, 基底は n 個のベクトルの組からなる. $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となることは, $n \times n$ 行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$ が正則行列となることと同値 (行列式の値が 0 でなければよい).

例 1　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ について考える．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&-5&-7\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&0&18\end{bmatrix}.$$

よって, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix} = 3$ となり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次独立.（行列式 $\neq 0$ を示してもよい.）

例 2　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}7\\-1\\0\end{bmatrix}$ について考える．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&3&7\\2&1&-1\\3&2&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&3&7\\0&-5&-15\\0&-7&-21\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&3&7\\0&1&3\\0&-7&-21\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

よって, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix} = 2$ となり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次従属．また, $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ の解は $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$ (c は任意定数) であるから, 非自明な１次関係式 $2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ.

例 3　$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} x+2y+4z=0 \\ x+\;\;y+\;\;z=0 \\ 5x+4y+2z=0 \end{array} \right\}$ を考える．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix}1&2&4\\1&1&1\\5&4&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&4\\0&-1&-3\\0&-6&-18\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&-6&-18\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ x+\;\;y+\;\;z=0 \\ 5x+4y+2z=0 \end{cases}$ の解は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$ (c は任意定数) より, $\left(\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$ が W の基底で次元は 1.

演習問題

1　**〈数ベクトルの１次独立性の判定と非自明な１次関係式〉**　次のベクトルの組が１次独立かどうか判定し，１次従属の場合には, 非自明な１次関係式を１つ求めよ. (各問について, 与えられたベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ と名付けて解け.)　［演習書 問題 11.3.1 より］

(1) $\begin{bmatrix}-1\\8\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-2\\-8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\-7\\17\end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-3\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\\-2\end{bmatrix}$　　(5) $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$

2 ［**1次独立性**］ ベクトル空間 V に属する 4 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立であるとする．次のベクトルの組は 1 次独立か否かを判定せよ．1 次従属の場合には，非自明な 1 次関係式を 1 つ求めよ．(各問で与えられたベクトルを前から順に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots$ とする．)

(1) $-\boldsymbol{a}_1 + 8\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3,\ \ 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - 8\boldsymbol{a}_3,\ \ -6\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 + 17\boldsymbol{a}_3$

(2) $-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4,\ \ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4,\ \ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4,\ \ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4$

(3) $\boldsymbol{a}_1 + \alpha\boldsymbol{a}_2,\ \ \boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{a}_3,\ \ \boldsymbol{a}_3 + \alpha\boldsymbol{a}_1\ \ (\alpha \in \mathbb{R}:$ 定数$)$

3 ［**数ベクトル空間の基底と次元**］ 次のベクトルの組のうち，$\mathbb{R}^3$ の基底になっているものをすべて答えよ．

$$\mathscr{B}_1 = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \right), \quad \mathscr{B}_2 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right), \quad \mathscr{B}_3 = \left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \right),$$

$$\mathscr{B}_4 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \right), \quad \mathscr{B}_5 = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} \right), \quad \mathscr{B}_6 = \left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right).$$

4 ［**部分空間の基底と次元**］ 次の 4 つの $\mathbb{R}^3$ の部分空間の基底と次元を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x + 2y + 3z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \end{array} \right\}, \quad W_4 = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{連立 1 次方程式} \\ \left\{ \begin{array}{r} x + 2y + z = a \\ 2x + y + 4z = b \\ x + 8y - 3z = c \end{array} \right. \\ \hfill \text{が解をもつ} \end{array} \right\}$$

5 ［**部分空間の基底**］ $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}4\\-1\\3\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}5\\4\\3\\-8\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}3\\1\\2\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

について，

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間に成り立つ非自明な 1 次関係式を 1 つ求めよ．

(2) 次のうち，W の基底となっているものをすべて選べ．

$$\mathscr{A}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \quad \mathscr{A}_2 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathscr{A}_3 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathscr{A}_4 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$$

(3) $\left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}4\\-1\\3\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\1\\-4\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}9\\-4\\7\\10\end{bmatrix} \right)$ は W の基底であることを示せ．

レポート課題

- **答だけでなく，計算の過程も**書いて下さい．（A4 **用紙１〜２枚**にまとめ，pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し，レポートを授業翌日までに **WebClass に提出**して「出席」となります．

1 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}$ (k は定数) について次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が１次従属となるための k の条件を求めよ．また，そのとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の満たす非自明な１次関係式を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ の次元を求めよ．

2 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \right\rangle$ の１組の基底と次元を求めよ．

3 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 5x + 3y - z + 9w = 0 \\ 2x + y \phantom{{}- z} + 4w = 0 \end{array} \right\}$$

の１組の基底と次元を求めよ．