

数学演習第二（演習第5回）【解答例】

線形：一次独立・一次従属, 基底と次元 (2024 年 11 月 6 日実施)

演習問題

1 (1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 22 & -55 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次従

属で, 非自明な 1 次関係式の 1 つは $\frac{3}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{5}{2}\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. 分母を払って $3\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ と表せば見やすい.

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より,

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ は 1 次従属で, 非自明な 1 次関係式の 1 つは $-\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$. (もしくは, $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$)

(5) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ は 1 次独立.

(この変形の最後から 2 番目の行列を見れば, 階数が 4 なので, この段階で 1 次独立とわかる.)

2 (1) $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3 = c_1(-\mathbf{a}_1 + 8\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3) + c_2(3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - 8\mathbf{a}_3) + c_3(-6\mathbf{a}_1 - 7\mathbf{a}_2 + 17\mathbf{a}_3)$
 $= (-c_1 + 3c_2 - 6c_3)\mathbf{a}_1 + (8c_1 - 2c_2 - 7c_3)\mathbf{a}_2 + (2c_1 - 8c_2 + 17c_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$
 とする. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次独立だから, $\begin{cases} -c_1 + 3c_2 - 6c_3 = 0 \\ 8c_1 - 2c_2 - 7c_3 = 0 \\ 2c_1 - 8c_2 + 17c_3 = 0 \end{cases}$ すなわち, 連立一次方程式

$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ を得るが, [1] (1) より, 係数行列を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる

ので, 解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) となる. よって, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は 1 次従属で, 非自明な 1 次関係式 $3\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$ が成り立つ.

(2) (1) と同様に, $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3 + c_4\mathbf{b}_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. [1] (5) より係数
 行列を簡約化すると単位行列になるので, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ となり, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ は 1 次独立.

(3) (1) と同様に, $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. 係数行列を基本変形して,
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 + 1 \end{bmatrix}$. よって, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は $\alpha = -1$ のとき 1 次
 従属で, 非自明な 1 次関係式 $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$ が成り立つ. また, $\alpha \neq -1$ のときは 1 次独立となる.

3

$\mathbb{R}^3$ は 3 次元なので、基底は 3 つのベクトルからなる。よって、 $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_6$ は基底ではない。また、 $\mathcal{B}_3$ は $\mathbf{0}$ を含むので明らかに 1 次従属であり、基底でない。 $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5$ に対しては、行列式が 0 かどうかを調べればよい。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

であるから、 $\mathbb{R}^3$ の基底となっているのは $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4$ である。

4

• W_1 の元は $\begin{bmatrix} 2s+3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$ と表せるので、 $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ 。この 2

つの列ベクトルは明らかに 1 次独立だから、 $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が W_1 の基底で、 $\dim W_1 = 2$ 。

• W_2 の 3 つのベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ と書く。 $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は 1 次独立で、非自明な 1 次関係式 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$ が成り立つ。

よって、 $W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ となり、 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ が基底で、 $\dim W_2 = 2$ 。

• W_3 については、 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、

$\dim W_3 = 1$ で、 $\left(\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ が基底となる。

• W_4 については、 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 4 & b \\ 1 & 8 & -3 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -2a+b \\ 0 & 6 & -4 & -a+c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & -5a+2b+c \end{bmatrix}$

より、 $W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -5a+2b+c=0 \right\}$ となるので、 W_1 と同様に $\dim W_4 = 2$ で、

$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$ が基底。

【注意】 一般に、 $m \times n$ 行列 $A = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ に対し、 $\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解を持つ} \} \subset \mathbb{R}^m$ は、第 7 回で見る A の列空間 $C(A) = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ に一致することが示せる。 W_4 に対しては

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ となっており、これは W_3 で扱った行列と同じである。 W_3 でみた簡約化の計算

から、 A の第 1 列と第 2 列のベクトルが $C(A)$ の基底となることがわかるので、 $\dim W_4 = 2$ と基底

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$ が得られる。

5

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & -28 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次従属で, 非自明な 1 次関係式 $3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ が成り立つことがわかる.

- (2) (1) から, $\mathcal{A}_1$ は基底にならない. 他方, 非自明な 1 次関係式を使うと, $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = (c_1 - 3c_3)\mathbf{a}_1 + (c_2 + 2c_3)\mathbf{a}_2 + c_4\mathbf{a}_4$ と書き直せるので, $\mathcal{A}_2 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$ は W を生成する. 同様に考えて, $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ はいずれも W を生成することがわかる. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ のどの 2 つ $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j$ をとっても $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_4$ は 1 次独立であることがチェックできるので, $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ はいずれも W の基底.

- (3) 基底の定義に従って次の 3 つの項目をチェックする: (i) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ が 1 次独立. (ii) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ が W に属する. (iii) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ が W を生成する.

$$(i) [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, $\text{rank}[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3] = 3$ であるから成立.

$$(ii) [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & -12 & -13 & -12 & -26 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4)$, $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$ とそれぞれ表せることからわかる.

- (iii) 逆に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ が $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ の 1 次結合で表せることを示せばよい. これは

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 10 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & -7 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 10 & -5 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, $\mathbf{a}_1 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_2 = 6\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_4 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ と表せることからわかる.

【注意】 (i) は $U = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$ が 3 次元で $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ がその基底であることを意味する. (ii) は $U \subset W$, (iii) は $U \supset W$ を意味する. (2) で $\dim W = 3$ であることがわかっているので, **教科書 命題 18.6** に注意すれば, (ii), (iii) のどちらか一方が言えれば, (i) と合わせて, $U = W$ であることが言え, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ が W の基底とわかる.

レポート問題

1 (1) 行基本変形により, $[a_1 \ a_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & -10 & k-16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & k+6 \end{bmatrix}.$

よって, a_1, a_2, a_3 が 1 次従属となる条件は $k = -6$ (行列式 $= 5(k+6) = 0$ から導かれる).

$k = -6$ のとき, 上の行基本変形を続けて, $\cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, 非自

明な 1 次関係式は $\frac{2}{5}a_1 - \frac{11}{5}a_2 + a_3 = 0$, あるいは $2a_1 - 11a_2 + 5a_3 = 0$.

(2) a_1, a_2 は明らかに 1 次独立であるから, $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ の次元は, $k = -6$ のとき 2 (基底は (a_1, a_2)),
 $k \neq -6$ のとき 3 (基底は (a_1, a_2, a_3) あるいは $(\underbrace{e_1, e_2, e_3}_{\text{基本ベクトル}})$).

基本ベクトル

2 行基本変形により, $[b_1 \ b_2 \ b_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$ これより,

$b_3 = -b_1 + 3b_2$ であり, b_1, b_2 は明らかに 1 次独立であるから, $V = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ の基底は (b_1, b_2) であり, 次元は $\dim V = 2$.

3 行基本変形により, $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$ こ

れより, W の元は $\begin{bmatrix} -s-3t \\ 2s+2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R})$ と表せるので, W の 1 組の基底は

$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ で, 次元は $\dim W = 2$.