

# 数学演習第二（演習第6回）

## 微積：偏微分 [2]（多変数のテーラーの定理、極値）

2024 年 11 月 13 日

演習第 4 回で多変数関数の偏微分について学んだ。今回は偏微分的应用として、2 変数関数のテーラー展開と極値について学習する。

### 【要点】

#### 2 変数関数のテーラーの定理(微積教科書 pp.94-95)

関数  $f(x, y)$  は開領域  $D$  において  $C^n$  級で、 $(a, b) \in D$  とする。

(1) (テーラーの定理)  $(a, b)$  と  $(a + h, b + k)$  を結ぶ線分が  $D$  に含まれるとき、

$$f(a + h, b + k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b) + \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k)$$

となる  $\theta \in (0, 1)$  が存在する。

(2) (漸近展開)

$$f(a + h, b + k) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b) + o((h^2 + k^2)^{n/2}) \quad ((h, k) \rightarrow (0, 0)).$$

ここで、 $\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f$  は二項係数  $\binom{j}{l} = \frac{j!}{l!(j-l)!}$  を用いて

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} h^{j-l} k^l \frac{\partial^j f}{\partial x^{j-l} \partial y^l}$$

と表される。

#### 《計算例》

1.  $\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(a, b)$  を計算すると、

$$\begin{aligned} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(a, b) &= \left( h^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2 k \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3h k^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) f(a, b) \\ &= h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b) + 3h^2 k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b) + 3h k^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a, b) + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b) \\ &= f_{xxx}(a, b)h^3 + 3f_{xxy}(a, b)h^2 k + 3f_{xyy}(a, b)h k^2 + f_{yyy}(a, b)k^3. \end{aligned}$$

2.  $f(x, y) = xe^{x-y}$  の 3 次までのマクローリン展開 (原点でのテーラー展開) を漸近展開の形で求める。

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \quad f_x(0, 0) = 1, \quad f_y(0, 0) = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = 2, \quad f_{xy}(0, 0) = -1, \quad f_{yy}(0, 0) = 0, \\ f_{xxx}(0, 0) &= 3, \quad f_{xxy}(0, 0) = -2, \quad f_{xyy}(0, 0) = 1, \quad f_{yyy}(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

であるから、上の (2) を用いれば  $((a, b) = (0, 0))$  として計算し、 $(h, k)$  を  $(x, y)$  で置き換える、

$$xe^{x-y} = x + x^2 - xy + \frac{1}{2}x^3 - x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2 + y^2)^{3/2}) \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)).$$

別解  $e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)$  ( $X \rightarrow 0$ ) を用いて、

$$\begin{aligned} xe^{x-y} &= x \{ 1 + (x - y) + \frac{1}{2}(x - y)^2 + o(x^2 + y^2) \} \\ &= x + x^2 - xy + \frac{1}{2}x^3 - x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2 + y^2)^{3/2}) \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)). \end{aligned}$$

## 2 変数関数の極値問題(微積教科書 pp.95-96)

点  $(a, b)$  の近傍で定義された実数値関数  $f(x, y)$  が点  $(a, b)$  で極大値  $f(a, b)$  をとるとは,  $(a, b)$  に十分近い  $(a, b)$  以外の周りの点  $(x, y)$  に対して,  $f(a, b)$  が  $f(x, y)$  より大きいことをいう. すなわち,  $\varepsilon$  を十分小さくとると,  $0 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < \varepsilon^2$  ならば, 不等式

$$f(a, b) > f(x, y)$$

が成り立つときをいう (極小値については上の不等号を逆向きにしたもので定義する). そして, 極大値と極小値を総称して極値と呼ぶ.

### (i) 極値をとるための必要条件 (極値をとる点の候補)

関数  $f$  が点  $(a, b)$  の近傍で  $x, y$  に関して偏微分可能で, 点  $(a, b)$  で極値をとるならば,  
 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  である.

### (ii) 極値の判別

関数  $f$  は点  $(a, b)$  の近傍で  $C^2$  級で,  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  であるとする. 判別式を

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2$$

で定義する.

- $D(a, b) > 0$  かつ  $f_{xx}(a, b) > 0$  ならば,  $f$  は点  $(a, b)$  で極小値をとる.
- $D(a, b) > 0$  かつ  $f_{xx}(a, b) < 0$  ならば,  $f$  は点  $(a, b)$  で極大値をとる.
- $D(a, b) < 0$  ならば,  $f$  は点  $(a, b)$  で極値をとらない.

## 《計算例》

1. 関数  $f(x, y) = -2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y = -\left(y + \frac{x+3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}(x-1)^2 + 4$  の極値を求めよ.

[ 解答 ]  $f$  の 2 次以下の偏導関数は

$$f_x = -4x - y + 2, \quad f_y = -x - 2y - 3 = 0, \quad f_{xx} = -4, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = -2.$$

(i)  $f_x = f_y = 0$  の解は  $(x, y) = (1, -2)$ .

(ii) 点  $(1, -2)$  において  $f$  が極値をとるかどうかを調べる.

$$D(1, -2) = (-4)(-2) - (-1)^2 = 7 > 0, \quad f_{xx}(1, -2) = -4 < 0$$

であるから,  $f$  は点  $(1, -2)$  で極大値  $f(1, -2) = 4$  をとる.

2. 関数  $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$  の極値を求めよ.

[ 解答 ]  $f$  の 2 次以下の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 - 2(x + y), & f_y &= 4y^3 - 2(x + y), \\ f_{xx} &= 12x^2 - 2, & f_{xy} &= -2, & f_{yy} &= 12y^2 - 2. \end{aligned}$$

(i)  $f_x = f_y = 0$  を解く.  $f_x = f_y = 0$  より  $4(x^3 - y^3) = 0$ , 従って  $x = y$ . この事実に注意して  $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1)$  を得る.

(ii) これらの各点で  $f$  が極値をとるかどうかを調べる.

- 点  $(0, 0)$  において,  $D(0, 0) = (-2)(-2) - (-2)^2 = 0$  (上の判別法は使えない).  $f(x, 0) = x^2(x^2 - 1) < 0 = f(0, 0)$  ( $0 < |x| < 1$ ),  $f(x, -x) = 2x^4 > 0 = f(0, 0)$  ( $x \neq 0$ ) であるから,  $(0, 0)$  では極値をとらない.
- 点  $(\pm 1, \pm 1)$  において,  $D(\pm 1, \pm 1) = 10 \cdot 10 - (-2)^2 = 96 > 0$ ,  $f_{xx}(\pm 1, \pm 1) = 10 > 0$ . よって,  $f$  は点  $(\pm 1, \pm 1)$  で極小値  $f(\pm 1, \pm 1) = -2$  をとる (複号同順).

## 【演習問題】

1 次の関数  $f(x, y)$  について, 3 次の項までのマクローリン展開 (原点におけるテーラー展開) を  $f(x, y) = (x, y \text{ の } 3 \text{ 次多項式}) + \cdots$  の形で求めよ.

(1)  $f(x, y) = \sin(xy)$

(2)  $f(x, y) = \sqrt{1+2x^2} \log(1-y)$

(3)  $f(x, y) = (1+y)^x (= e^{x \log(1+y)})$

(4)  $f(x, y) = a^{x+2y} \quad (0 < a \neq 1)$

(5)  $f(x, y) = \frac{\text{Tan}^{-1} y}{\cos x}$

(6)  $f(x, y) = \sqrt{1+e^{2xy}}$

2 次の関数  $f(x, y)$  が  $(0, 0)$  において極値をとるかどうかを判別せよ.

(1)  $f(x, y) = \cos x + \cos y + 2xy$

(2)  $f(x, y) = x^2 + y^4$

(3)  $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy - y^2$

(4)  $f(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 - 2xy + y^2$

3 次の関数  $f(x, y)$  に対して  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  となる点  $(a, b)$  をすべて求めよ. さらに,  $f(x, y)$  の極値を求めよ.

(1)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - 4y$

(2)  $f(x, y) = x^2y - xy^2 + x^2 - xy + y^2 + 1$

(3)  $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y) \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$

(4)  $f(x, y) = (\sin x)(\sin y) \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$

(5)  $f(x, y) = (x+y)e^{-\frac{xy}{2}}$

(6)  $f(x, y) = x^5 - x^2y + y^2$

## 【レポート課題】

次の (1), (2) については 3 次 までのマクローリン展開 (1 と同じ形式) を求め, (3), (4) については極値を求めよ.

(1)  $f(x, y) = \log(\cos(x-y))$

(2)  $f(x, y) = \frac{\text{Cos}^{-1} x}{\cosh y}$

(3)  $f(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - 8y$

(4)  $f(x, y) = (e^y - y) \cos x \quad (-\pi < x < \pi)$