数学演習第二（第６回）【解答例】

微積：偏微分 [2] (テーラーの定理, 極値)　2024 年 11 月 13 日 実施

【演習問題】

1 原点 $(0,0)$ の近傍で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ が $(x,y)\to(0,0)$ において

$$f(x,y)=c_{00}+(c_{10}x+c_{01}y)+(c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2)+(c_{30}x^3+c_{21}x^2y+c_{12}xy^2+c_{03}y^3)+o((x^2+y^2)^{3/2})$$

の形に展開されるとすれば, 各項の係数は一意に定まる (漸近展開の一意性). 特に, $f(x,y)$ が C^3 級ならば, この形の展開がマクローリン展開の公式

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\Big(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\Big)\\&\quad+\frac{1}{6}\Big(f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\Big)+o((x^2+y^2)^{3/2})\end{aligned}\qquad(*)$$

によって与えられる. (問題文では $o((x^2+y^2)^{3/2})$ の部分を $\cdots$ で表している.) これを用いれば問題の各関数の 3 次までの展開式は必ず求まるが, 漸近展開の一意性のおかげで, 0 の近傍で C^3 級の 1 変数関数 $\varphi(t)$ に対するマクローリン展開の公式

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2}\varphi''(0)t^2+\frac{1}{6}\varphi'''(0)t^3+o(t^3)\quad(t\to0)$$

を利用して, より単純な計算で展開式が得られることがある. 与えられた関数はそのような場合に該当する.

(1) $\sin t=t+o(t^2)$ に $t=xy$ を代入し, $\sin(xy)=xy+o((x^2+y^2)^2)=\underline{xy+o((x^2+y^2)^{3/2})}$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$f_x=y\cos(xy),\ \ f_y=x\cos(xy),\ \ f_{xx}=-y^2\sin(xy),\ \ f_{xy}=\cos(xy)-xy\sin(xy),\ \ f_{yy}=-x^2\sin(xy),$$
$$f_{xxx}=-y^3\cos(xy),\ \ f_{xxy}=-2y\sin(xy)-xy^2\cos(xy),\ \ f_{xyy}=-2x\sin(xy)-x^2y\cos(xy),\ \ f_{yyy}=-x^3\cos(xy).$$

(2) $\sqrt{1+s}$ のマクローリン展開式 $\sqrt{1+s}=1+(1/2)s-(1/8)s^2+o(s^2)$ $(s\to0)$, および $\log(1+t)$ のマクローリン展開式 $\log(1+t)=t-(1/2)t^2+(1/3)t^3+o(t^3)$ $(t\to0)$ にそれぞれ $s=2x^2$, $t=-y$ を代入して,

$$\sqrt{1+2x^2}=1+x^2+o(x^3)\quad(x\to0),\qquad \log(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+o(y^3)\quad(y\to0).$$

これらを掛け合わせて

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x^2}\,\log(1-y)&=(1+x^2+o(x^3))\Big(-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+o(y^3)\Big)\\&=\boxed{-y-\frac{1}{2}y^2-x^2y-\frac{1}{3}y^3}+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad((x,y)\to(0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は $g(x)=\sqrt{1+2x^2}$, $h(y)=\log(1-y)$ とおいて,

$$f_x=g'h,\ f_y=gh',\ f_{xx}=g''h,\ f_{xy}=g'h',\ f_{yy}=gh'',\ f_{xxx}=g'''h,\ f_{xxy}=g''h',\ f_{xyy}=g'h'',\ f_{yyy}=gh'''$$

であり, ここで現れる導関数は次の通り:

$$g'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}},\ \ g''(x)=\frac{2}{(1+2x^2)^{3/2}},\ \ g'''(x)=-\frac{12x}{(1+2x^2)^{5/2}},$$
$$h'(y)=-\frac{1}{1-y},\ \ h''(y)=-\frac{1}{(1-y)^2},\ \ h'''(y)=-\frac{2}{(1-y)^3}.$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい.

(3) $(1+y)^x=\{e^{\log(1+y)}\}^x=e^{x\log(1+y)}$ において,

$$x\log(1+y)=x\Big(y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\Big)=xy-\frac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2}).$$

よって, $t = x\log(1+y)$ を $e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ $(t \to 0)$ に代入して,

$$\begin{aligned}(1+y)^x = e^{x\log(1+y)} &= 1 + \left(xy - \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})\right) + o((x^2+y^2)^{3/2}) \\ &= \underline{1 + xy - \frac{1}{2}xy^2} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$\begin{aligned}
&f_x = (1+y)^x \log(1+y), \quad f_y = x(1+y)^{x-1}, \\
&f_{xx} = (1+y)^x\big(\log(1+y)\big)^2, \quad f_{xy} = (1+y)^{x-1}\big(1 + x\log(1+y)\big), \quad f_{yy} = x(x-1)(1+y)^{x-2}, \\
&f_{xxx} = (1+y)^x\big(\log(1+y)\big)^3, \quad f_{xxy} = (1+y)^{x-1}\log(1+y)\big(2 + x\log(1+y)\big), \\
&f_{xyy} = (1+y)^{x-2}\big(2x - 1 + x(x-1)\log(1+y)\big), \quad f_{yyy} = x(x-1)(x-2)(1+y)^{x-3}.
\end{aligned}$$

(4) $a^{x+2y} = (e^{\log a})^{x+2y} = e^{(x+2y)\log a}$ であるから, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ $(t \to 0)$ に $t = (\log a)(x+2y)$ を代入し, $|(x+2y)^3| \le 5^{3/2}(x^2+y^2)^{3/2}$ に注意して,

$$\begin{aligned}a^{x+2y} &= 1 + (\log a)(x+2y) + \frac{1}{2}(\log a)^2(x+2y)^2 + \frac{1}{6}(\log a)^3(x+2y)^3 + o((x^2+y^2)^{3/2}) \\ &= \underline{1 + (\log a)(x+2y) + (\log a)^2\left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2\right) + (\log a)^3\left(\frac{1}{6}x^3 + x^2y + 2xy^3 + \frac{4}{3}y^3\right)} \\ &\quad + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$\begin{aligned}
&f_x = (\log a)a^{x+2y}, \ f_y = 2(\log a)a^{x+2y}, \ f_{xx} = (\log a)^2a^{x+2y}, \ f_{xy} = 2(\log a)^2a^{x+2y}, \ f_{yy} = 4(\log a)^2a^{x+2y}, \\
&f_{xxx} = (\log a)^3a^{x+2y}, \quad f_{xxy} = 2(\log a)^3a^{x+2y}, \quad f_{xyy} = 4(\log a)^3a^{x+2y}, \quad f_{yyy} = 8(\log a)^3a^{x+2y}.
\end{aligned}$$

(5) $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}\, y$ とおいて $f(x,y) = g(x)h(y)$ と書く. ここで, $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ であるから, $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ を用いて,

$$g(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2}x^2 + o(x^3))} = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

また, $h(y)$ については, $h'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$ を $[0,\, y]$ 上で積分して,

$$h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}\, y = \int_0^y h'(t)\,dt = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3).$$

よって,

$$\frac{\mathrm{Tan}^{-1}\, y}{\cos x} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\left(y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)\right) = \underline{y + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}y^3} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \ \ ((x,y) \to (0,0)).$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は

$$\begin{aligned}
&f_x = g'h, \quad f_y = gh', \quad f_{xx} = g''h, \quad f_{xy} = g'h', \quad f_{yy} = gh'', \\
&f_{xxx} = g'''h, \quad f_{xxy} = g''h', \quad f_{xyy} = g'h'', \quad f_{yyy} = gh'''
\end{aligned}$$

であり, ここに現れる導関数は次の通り:

$$\begin{aligned}
&g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad g''(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}, \quad g'''(x) = \frac{(5 + \sin^2 x)\sin x}{\cos^4 x}, \\
&h'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad h''(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}, \quad h'''(y) = -\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3}.
\end{aligned}$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい.

(6) $g(t) = \sqrt{1 + e^{2t}}$ とおけば, $f(x,y) = g(xy)$ と書ける. ここで,

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \ \ (t \to 0), \quad \sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + o(s^2) \ \ (s \to 0)$$

であるから，

$$1+e^{2t}=1+(1+2t+2t^2+o(t^2))=2(1+t+t^2+o(t^2)),$$

$$\sqrt{1+e^{2t}}=\sqrt{2}\sqrt{1+(t+t^2+o(t^2))}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}(t+t^2)-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)=\sqrt{2}+\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{3t^2}{4\sqrt{2}}+o(t^2).$$

これに $t=xy$ を代入して，$\sqrt{1+e^{2xy}}=\underline{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}xy}+o((x^2+y^2)^{3/2})\ \ ((x,y)\to(0,0))$.

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は

$$f_x=g'(xy)y,\ \ f_y=g'(xy)x,\ \ f_{xx}=g''(xy)y^2,\ \ f_{xy}=h(xy),\ \ f_{yy}=g''(xy)x^2,$$
$$f_{xxx}=g'''(xy)y^3,\ \ f_{xxy}=h'(xy)y,\ \ f_{xyy}=h'(xy)x,\ \ f_{yyy}=g'''(xy)x^3$$

と表される．ここで，$h(t)=tg''(t)+g'(t)$, $h'(t)=tg'''(t)+2g''(t)$. 更に，

$$g'(t)=e^{2t}(1+e^{2t})^{-1/2},\ \ g''(t)=(2+e^{2t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-3/2},\ \ g'''(t)=(4+2e^{2t}+e^{4t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-5/2}.$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し，$(*)$ に代入すればよい．

2

(1) $f(x,y)=\cos x+\cos y+2xy$. $f_x=2y-\sin x$, $f_y=2x-\sin y$ より，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. $f_{xx}=-\cos x$, $f_{xy}=2$, $f_{yy}=-\cos y$ より，$D(0,0)=-3<0$. よって，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で <u>極値をとらない</u>.

(2) $f(x,y)=x^2+y^4$. $(x,y)\neq(0,0)$ で $f(x,y)>0=f(0,0)$ となるので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で <u>極小値をとる</u>.

(3) $f(x,y)=(x^2)^2-(x-y)^2=(x^2+x-y)(x^2-x+y)$ と表すと，$x\neq0$ のとき，$-x^2+x<x^2+x$ で，$-x^2+x<y<x^2+x$ ならば，$f(x,y)>0=f(0,0)$ をみたし，$y<-x^2+x$ または $y>x^2+x$ ならば，$f(x,y)<0=f(0,0)$ をみたす．よって，$(0,0)$ で <u>極値をとらない</u>.

(4) 2 次以下の項を (2) と同様に変形して，$f(x,y)=x^4+y^4+(x-y)^2$ と表される．$(x,y)\neq(0,0)$ で $f(x,y)>0=f(0,0)$ となるので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で <u>極小値をとる</u>.

3

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-4y$. $\begin{cases}f_x=2x-y-1=0\\ f_y=-x+2y-4=0\end{cases}$ を解いて，$(x,y)=\underline{(2,3)}$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=2, f_{xy}=-1, f_{yy}=2$ より $D(2,3)=3>0$. よって，f は <u>$(2,3)$ で極小値 $f(2,3)=-7$</u> をとる.

(2) $f(x,y)=x^2y-xy^2+x^2-xy+y^2+1$. $\begin{cases}f_x=2xy-y^2+2x-y=(y+1)(2x-y)=0\\ f_y=x^2-2xy-x+2y=0\end{cases}$ より，第一式から $y=-1,2x$. 第二式から (i) $y=-1$ のとき，$x^2+x-2=0$ より，$\underline{(x,y)=(-2,-1),(1,-1)}$, (i) $y=2x$ のとき，$-3x^2+3x=0$ より，$\underline{(x,y)=(0,0),(1,2)}$ (この 4 点が極値を与える候補). $f_{xx}=2y+2$, $f_{xy}=2x-2y-1$, $f_{yy}=-2x+2$ より，$D(1,2)=f_{xx}(1,2)f_{yy}(1,2)-f_{xy}(1,2)^2=6\cdot0-(-3)^2<0$, $D(1,-1)=0\cdot0-3^2$, $D(-2,-1)=0\cdot6-(-3)^2<0$ なので，$(1,2),(1,-1),(-2,-1)$ で f は極値を取らない．$D(0,0)=2\cdot2-(-1)^2>0$, $f_{xx}(0,0)=2>0$ より，f は <u>$(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=1$</u> をとる.

(3) $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$. $\begin{cases}f_x=\cos x-\cos(x+y)=0\\ f_y=\cos y-\cos(x+y)=0\end{cases}$ において 2 式の差をとり，$\cos x=\cos y$, $x,y\in(0,\pi)$ から $x=y$, よって $(x,y)=\underline{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)}$ を得る (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\sin x+\sin(x+y)$, $f_{xy}=\sin(x+y)$, $f_{yy}=-\sin y+\sin(x+y)$ なので，$D\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}>0$, $f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$ より $f(x,y)$ は <u>$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ で極大値 $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$</u> をとる.

(4) $f(x,y)=\sin x\sin y$. $\begin{cases}f_x=\cos x\sin y=0\\ f_y=\sin x\cos y=0\end{cases}$ を解いて，$(x,y)=\underline{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\sin x\sin y$, $f_{xy}=\cos x\cos y$, $f_{yy}=-\sin x\sin y$ より，$D(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y-\cos^2 x\cos^2 y$. $D\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1>0$, $f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$ より，$f(x,y)$ は <u>$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ で極大値 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1$</u> をとる.

(5) $\begin{cases}f_x=\{1-(1/2)y(x+y)\}e^{-\frac{xy}{2}}=0\\ f_y=\{1-(1/2)x(x+y)\}e^{-\frac{xy}{2}}=0\end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(\pm1,\pm1)$ (この 2 点が極値を与える候補).

$$f_{xx}=-\frac{1}{4}\,y\{4-(x+y)y\}\,e^{-\frac{xy}{2}},\quad f_{xy}=-\frac{1}{4}(x+y)(4-xy)\,e^{-\frac{xy}{2}},\quad f_{yy}=-\frac{1}{4}\,x\{4-(x+y)x\}\,e^{-\frac{xy}{2}}$$

より，$D(\pm1,\pm1)=\left(\mp\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)\left(\mp\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)-\left(\mp\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)^2=-\frac{2}{e}<0$．よって，$f$ は極値をとらない．

(6) $f(x,y)=x^5-x^2y+y^2$．$\begin{cases} f_x=x(5x^3-2y)=0 \\ f_y=-x^2+2y=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(0,0),\ \left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)$ (この 2 点が極値を与える候補)．2 次の偏導関数は $f_{xx}=20x^3-2y,\ f_{xy}=-2x,\ f_{yy}=2$．

(a) $D(0,0)=0$ より，$D(0,0)$ からは極値判定できない．$f(x,y)=\left(y-\frac{x^2}{2}\right)^2-x^4\left(\frac{1}{4}-x\right)$ と変形すれば $y=\frac{x^2}{2}$ 上で第 1 項が消えるので $f\left(t,\frac{t^2}{2}\right)=-t^4\left(\frac{1}{4}-t\right)<0\ \left(0<|t|<\frac{1}{4}\right)$ であり，y 軸上で $f(0,y)=y^2>0\ (y\neq0)$ である．よって，f は $(0,0)$ で極値をとらない．

(b) $D\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)=\frac{2}{25}>0,\ f_{xx}\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)=\frac{3}{25}>0$ より，f は $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)$ で極小値 $f\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)=-\frac{1}{12500}$ をとる．

【レポート課題】

(1), (2) については $\boxed{\mathbf{1}}$ の解答例も参照せよ．ランダウの記号で表した部分は $\cdots$ と書いてもよい．

(1) $\cos t=1-\frac{1}{2}t^2+o(t^3)\ (t\to0)$ に $t=x-y$ を代入し，$\log(1+u)=u+o(u)\ (u\to0)$ に $u=\cos t-1=-\frac{1}{2}(x-y)^2+o((x^2+y^2)^{3/2})$ を代入して，

$$\log(\cos(x-y))=\boxed{-\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2}+o((x^2+y^2)^{3/2})\qquad((x,y)\to(0,0))$$

(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\,x=\mathrm{Cos}^{-1}\,0-\int_0^x(1-t^2)^{-1/2}\,dt=\frac{\pi}{2}-\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right)dt=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\ (x\to0)$ および $\cosh y=\frac{e^y+e^{-y}}{2}=1+\frac{1}{2}\,y^2+o(y^3)\ (y\to0)$ より，$g(y)=\frac{1}{\cosh y}=a_0+a_2\,y^2+o(y^3)$ と表すと

$$1=g(y)\cosh y=a_0+\left(\frac{1}{2}\,a_0+a_2\right)y^2+o(y^3)\qquad(y\to0)$$

から，$a_0=1,\ a_2=-\frac{1}{2}\,a_0=-\frac{1}{2}$ なので，$g(y)=1-\frac{1}{2}\,y^2+o(y^3)\ (y\to0)$ を得る．よって，

$$\frac{\mathrm{Cos}^{-1}\,x}{\cosh y}=\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(1-\frac{1}{2}\,y^2+o(y^3)\right)=\boxed{\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4}\,y^2-\frac{1}{6}\,x^3+\frac{1}{2}\,xy^2}+o((x^2+y^2)^{3/2})$$

(3) $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2x-8y$．$\begin{cases} f_x=2x+4y-2=2(x+2y-1)=0 \\ f_y=4x+10y-8=2(2x+5y-4)=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(-3,2)$ (この点が極値を与える候補)．$f_{xx}=2>0,\ f_{xy}=4,\ f_{yy}=10,\ D=f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=4>0$ から，f は $\boxed{(-3,2)\text{ で極小値 }f(-3,2)=-5}$ をとる．このことは $f(x,y)=(x+2y-1)^2+(y-2)^2-5$ からもわかる．

(4) $f(x,y)=(e^y-y)\cos x$．$\begin{cases} f_x=(y-e^y)\sin x=0 \\ f_y=(e^y-1)\cos x=0. \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(0,0)$ (この点が極値を与える候補)．ここで，「すべての実数 y に対して，$e^y>y$」および「$e^y=1$ ならば，$y=0$」を用いた．そして，$f_{xx}=(y-e^y)\cos x$, $f_{xy}=(1-e^y)\sin x,\ f_{yy}=e^y\cos x$．$D(0,0)=-1\cdot1-0^2=-1<0$ より，f は $\boxed{\text{極値をとらない}}$．このことは $f(x,y)=1-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{2}\,y^2+o(x^2+y^2)\ ((x,y)\to(0,0))$ を表しており，$(0,0)$ の近くで，$f(x,y)$ は $1+\frac{1}{2}(y+|x|)(y-|x|)$ と同じ挙動していることを意味する．よって，$(0,0)$ の十分小さな近傍において，$f(x,y)-f(0,0)$ は $-|x|<y<|x|$ で負の値をとり，$y<-|x|$ または $y>|x|$ で正の値をとる．