数学演習第二（演習第７回）

線形：座標, 行列の零空間・行空間・列空間

2024 年 11 月 20 日

要点

〈基底によるベクトルの座標〉 (線形教科書 pp. 119–120)

ベクトル空間 V の基底 $\mathscr{B}=(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r)$ に対して, 各 $\boldsymbol{v}\in V$ は $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r$ の１次結合で１通りに表される:

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{b}_r=(\boldsymbol{b}_1,\,\dots,\,\boldsymbol{b}_r)\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{bmatrix}.$$

このとき一意に定まる列ベクトル $\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する**座標**といい, $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}$ で表す. V が数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (の部分空間) であれば, 座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}$ を求めるには非同次連立１次方程式

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r\end{bmatrix}}_{n\times r\ \text{行列}}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{bmatrix}=\boldsymbol{v}$$

を解けばよい.

〈行列の零空間・行空間・列空間〉 (線形教科書 pp. 107, 130, 132)

$m\times n$ 行列 $A=\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_m\end{bmatrix}}_{\text{行ベクトル分割}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_n\end{bmatrix}}_{\text{列ベクトル分割}}$ に対して,

A の**零空間** $N(A):=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ (同次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解全体が作る $\mathbb{R}^n$ の部分空間)

A の**行空間** $R(A):=\langle\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_m\rangle$ (n 次行ベクトル $\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_m$ で生成される $\mathbb{R}_n$ の部分空間)

A の**列空間** $C(A):=\langle\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_n\rangle$ (m 次列ベクトル $\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間)

ただし, $\mathbb{R}_n$ は n 次<u>行ベクトル</u>全体が作るベクトル空間を表す. このとき, 次が成り立つ.

- $\dim N(A)=n-\operatorname{rank}A$, $\dim R(A)=\dim C(A)=\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}{}^{\mathrm{t}}A$. (教科書 命題 19.2, 19.9)
- $R(A)$ は A を行基本変形しても変わらない (教科書 補題 19.4) ので, 行基本変形して, 簡約行列の主成分を含む行ベクトルを取れば $R(A)$ の基底になる.
- A に行基本変形を行うと $C(A)$ は変わってしまうが, 列ベクトルの間に成り立つ１次関係式は保たれるので, A の簡約行列の主成分を持つ列に対応する<u>元の</u> A の列ベクトルを取れば $C(A)$ の基底になる. 別の方法として, $R({}^{\mathrm{t}}A)$ の基底を計算し, それらの転置を取ってもよい. これは A を列基本変形して (列に関する) 簡約行列の主成分を含む列ベクトルを取ることに他ならない.

〈共通部分と和空間に関する次元公式〉 (線形教科書 p. 134)

ベクトル空間 V の部分空間 W_1,W_2 に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2).$$

例題 1 $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathscr{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$ に対して, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}$ を求める.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

より, 基本変形後の列ベクトルの間の関係式を考えると, $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$ が分かる. よって $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

例題 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ を行基本変形すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A の簡約行列) となる. よって, $N(A)$ の基底の１例として $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ が取れる. また, $R(A)$ の基底の１例は, 簡約行列の主成分を持つ行を取って, $([1,\ 0,\ 3],\ [0,\ 1,\ 1])$. $C(A)$ の基底の一例は, 簡約行列の主成分を持つ列に対応する元の列ベクトルを見て $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ が取れる.

【注】行ベクトルでは, しばしば成分をカンマで区切って表す (特に数が成分の場合). 例えば, 上では $[1 \quad 0 \quad 3]$ の代わりに $[1,\ 0,\ 3]$ と書いた.

例題 3 $\mathbb{R}^3$ の２つの部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

に対する和空間 $W_1 + W_2$ と共通部分 $W_1 \cap W_2$ を考える. 行基本変形により,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

行基本変形によって列ベクトルの間の１次関係式や１次独立性は保たれるので, 簡約行列を見て $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$ は１次独立で, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ となっていることが分かる ($(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ は $W_1 + W_2$ の１つの基底). また, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は１次独立で, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ も１次独立であることが分かる (簡約行列の対応する列ベクトルを見る). よって, $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ であり, 次元公式から $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$ となる. さらに, 簡約行列から, 非自明な１次関係式

$$\boldsymbol{a}_1 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0} \quad \text{すなわち} \quad 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$$

が読み取れる. これは $2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ を意味する. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ だったので, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ が $W_1 \cap W_2$ の基底となる.

【別法】 $W_1 \cap W_2$ の基底については次のように考えることもできる. $W_1 \cap W_2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2$ の形に書ける. このとき, $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + (-d_1)\boldsymbol{b}_1 + (-d_2)\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ であるから, 上の基本変形から $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -d_1 \\ -d_2 \end{bmatrix} = \dfrac{t}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が得られ, $2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ $(= \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2)$ が $W_1 \cap W_2$ を生成することが分かる. よって, $(2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)$ が $W_1 \cap W_2$ の基底となる. (次元公式は用いていない.)

演習問題

1 $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\mathscr{E} = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ および次の 2 つの基底を考える:

$$\mathscr{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \mathscr{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right).$$

(1) $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{E}}, [\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}}, [\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{B}}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathscr{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{A}}$ が $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{u}$ の基底 $\mathscr{E}$ に関する座標 $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{E}}$ および基底 $\mathscr{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{B}}$ を求めよ.

2 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ と V の基底 $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ を考える. このとき, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}$ (k は定数) が V に属するかどうかを調べ, V に属するならば基底 $\mathscr{A}$ に関する座標を求めよ.

3 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を次のように定める:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 3y + z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{連立 1 次方程式} \\ \begin{cases} x + 4y + 3z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ 3x + 5y + 2z = c \end{cases} \\ \text{が解をもつ} \end{array} \right\}$$

(1) W_1 の基底と次元を求めよ.

(2) W_2 は行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ の列空間となる. この事実に注目して, W_2 の基底と次元を求めよ.

(3) 上で求めた W_1, W_2 の基底に含まれるベクトルから $W_1 + W_2$ の基底を選び, その次元を求めよ.

(4) $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

4 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2, W_3 を次のように定める.

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x + 3y + z - w = 0 \\ x + 2y - z + 2w = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x + y - 3z + w = 0 \right\}$$

(1) W_2 の基底と次元を求めよ.

(2) $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ について, 基底と次元を求めよ.

(3) $W_2 + W_3, W_2 \cap W_3$ について, 基底と次元を求めよ.

$\boxed{5}$ $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A の零空間 $N(A)$, 行空間 $R(A)$, 列空間 $C(A)$ について, 基底と次元を求めよ.

(2) ${}^{\mathrm{t}}A$ の零空間 $N({}^{\mathrm{t}}A)$, 行空間 $R({}^{\mathrm{t}}A)$, 列空間 $C({}^{\mathrm{t}}A)$ について, 基底と次元を求めよ.

レポート課題

- **答だけでなく**, **計算の過程も** 書いて下さい. （A4 **用紙１〜２枚**にまとめ pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります.

$\boxed{\mathrm{I}}$ $\mathbb{R}^3$ の 2 つの部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

と, W_1 の基底 $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ および W_2 の基底 $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ について次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の中のいくつかのベクトルを並べて $W_1 + W_2$ の基底を作れ. また, その基底を $\mathscr{C}$ とするとき, 残ったベクトル $(\in W_1 + W_2)$ の基底 $\mathscr{C}$ に関する座標を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の 1 つの基底を求めよ. また, その基底を作るベクトル $(\in W_2)$ の基底 $\mathscr{A}$, 基底 $\mathscr{B}$ に関する座標をそれぞれ求めよ.

$\boxed{\mathrm{II}}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列まで変形し, それを利用して A の零空間 $N(A)$, 行空間 $R(A)$, 列空間 $C(A)$ のそれぞれについて, 基底と次元を求めよ. ただし, 基底をなすベクトルは整数を成分とするように選ぶこと.