数学演習第二（演習第７回）【解答例】

線形： 座標, 行列の零空間・行空間・列空間　　2024 年 11 月 20 日

演習問題

1 (1) まず, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$ より $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. 次に, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 最後に, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}}$ を求めるために $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1$ を解く.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

より, $\boldsymbol{b}_1 = -8\boldsymbol{a}_1 - 11\boldsymbol{a}_2 - 6\boldsymbol{a}_3$. よって, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} -8 \\ -11 \\ -6 \end{bmatrix}$.

(2) まず, 与えられた条件から $\boldsymbol{u} = p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} q-2r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}]_{\mathscr{E}}$. 次に, $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{B}}$ を求めるために, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q-2r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix}$ を解く.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{u} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q-2r \\ 2 & 4 & 5 & -p+r \\ 3 & 5 & 6 & p-q \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & q-2r \\ 0 & 0 & -1 & -p-2q+5r \\ 0 & -1 & -3 & p-4q+6r \end{bmatrix} \\ &\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2p-7q+10r \\ 0 & 1 & 3 & -p+4q-6r \\ 0 & 0 & 1 & p+2q-5r \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5p-q-5r \\ 0 & 1 & 0 & -4p-2q+9r \\ 0 & 0 & 1 & p+2q-5r \end{array}\right] \end{aligned}$$

より, $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 5p-q-5r \\ -4p-2q+9r \\ p+2q-5r \end{bmatrix}$.

2 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ をまとめて解く.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & -6 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 13 & k \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 7 & 28 & k+9 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & k-61 \end{array}\right]$$

より, $\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 \in V$, $\boldsymbol{b}_2 = 17\boldsymbol{a}_1 + 10\boldsymbol{a}_2 \in V$ ($k = 61$ のとき), $\boldsymbol{b}_2 \notin V$ ($k \neq 61$ のとき) であることが分かり, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \end{bmatrix}$ ($k = 61$ のとき).

3 (1) 同次連立１次方程式 $2x + 3y + z = 0$ の解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ であるから, W_1 の１つの基底は $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ で, 次元は $\dim W_1 = 2$.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, W_2 の１つの基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$ であり, 次元は $\dim W_2 = 2$.

【注】 $\begin{cases} x+4y+3z=a \\ 2x+3y+\ \ z=b \\ 3x+5y+2z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ より, $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = C(A)$.

(3) (1), (2) で選んだ W_1, W_2 の基底をそれぞれ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ と書き, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & 4 & \frac{17}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

よって, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ が W_1+W_2 の基底となる. また, 次元は $\dim(W_1+W_2) = 3$. ($W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ であることに注意.)

(4) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ の簡約行列から, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の非自明な1次関係式は $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - 4\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ およびそれを 0 でない定数倍したものに限られることが読み取れる (例題 3 【別法】参照). このとき, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 4\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ であるから, $W_1 \cap W_2$ の基底は $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ であり, 次元は $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

4 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ より, W_2 の次元は $\dim W_2 = 2$ で, 1つの基底は $\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. これを $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ とおく.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は明らかに1次独立なので, $\dim W_1 = 2$ であり,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ -5 & 3 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, $W_1 + W_2$ の次元は $\dim(W_1 + W_2) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = 3$ で, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ が基底となる. 共通部分と和空間の次元公式から, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$. 上の基本変形から $-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ となることが分かり, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ が従う. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ だから, $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が $W_1 \cap W_2$ の基底となる (3 (4) と同じように考えてもよい).

【別法】$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \\ -5c_1 + 3c_2 \\ 2c_1 - c_2 \\ -c_1 + 2c_2 \end{bmatrix}$ を W_2 の条件にある連立1次方程式に代入して, c_1, c_2 の満たす条件を求める方法でもできる.

(3) $\dim W_2 = 2$, $\dim W_3 = 3$. さらに,

$$W_2 \cap W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x+3y+z-w=0 \\ x+2y-z+2w=0 \\ 2x+y-3z+w=0 \end{matrix} \right\}$$

であるから, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -10 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$ より,

$\dim(W_2 \cap W_3) = 1$ で，1つの基底は $\left(\begin{bmatrix} 10 \\ -7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$. $\dim W_2 = 2$, $\dim W_3 = 3$ より，共通部分と和に関する次元公式から，$\dim(W_2 + W_3) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. よって $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^4$.

【別法】W_3 の基底を求めて (1), (2) と同じ方法で考えてもよい．

$\boxed{5}$ (1) 行列 A の零空間, 行空間, 列空間の基底は A の簡約行列をもとに考える．零空間 $N(A)$ の次元は $\dim N(A) = (A$ の列数$) - \operatorname{rank} A$ であり，基底は同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を選べばよい．列空間 $C(A)$ の次元は $\dim C(A) = \operatorname{rank} A$ であり，基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列 A の列を取ればよい．行空間 $R(A)$ の次元は $\dim R(A) = \operatorname{rank} A$ であり，行基本変形で行空間は変わらないので，基底は簡約行列の1行目から $\operatorname{rank} A$ 行目までを取ればよい．

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 6 & 15 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$\dim N(A) = 2$ で，基底の1つは $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\dim C(A) = \operatorname{rank} A = 3$ で，A の簡約行列の主成分が第 1, 2, 4 列にあることから，基底の1つは A の第 1, 2, 4 列 $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$. また，$\dim R(A) = \operatorname{rank} A = 3$ で，1つの基底は $([1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 2],\ [0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 3],\ [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0])$.

(2)
$${}^{t}A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 14 & 4 \\ 0 & -15 & -21 & -6 \\ 0 & -8 & -11 & -4 \\ 0 & -25 & -35 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
より，零空間 $N({}^{t}A)$ については，$\dim N({}^{t}A) = 1$ で，1つの基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. 列空間 $C({}^{t}A)$ については，$\dim C({}^{t}A) = \operatorname{rank} {}^{t}A = 3$ で，簡約行列の主成分が第 1, 2, 3 列にあることから，1つの基底は ${}^{t}A$ の第 1, 2, 3 列をとって $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. また，行空間 $R({}^{t}A)$ については，$\dim R({}^{t}A) = \operatorname{rank} {}^{t}A = 3$ で，1つの基底は $([1,\ 0,\ 0,\ -1],\ [0,\ 1,\ 0,\ 6],\ [0,\ 0,\ 1,\ -4])$.

【注意】$R({}^{t}A)$ の基底は $C(A)$ の基底の転置，$C({}^{t}A)$ の基底は $R(A)$ の基底の転置をとってもよい．

レポート課題

I $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約化すると,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 7 & 3\\ 3 & 7 & 9 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -3 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

(1) 上の計算より, W_1+W_2 の基底として $\mathscr{C} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ がとれる ($\dim(W_1+W_2) = \mathbb{R}^3$, 従って $W_1+W_2 = \mathbb{R}^3$ となることに注意). また, 残ったベクトル $\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 - 4\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{b}_1$ と書けるので, $\boldsymbol{b}_2 \in W_1+W_2$ の基底 $\mathscr{C}$ に関する座標は $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix}1\\ -4\\ 3\end{bmatrix}$.

(2) $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$, $\dim(W_1+W_2) = 3$ ($(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ が基底) であるから, 次元公式により

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1+W_2) = 1.$$

また, 簡約行列から非自明な関係式 $\boldsymbol{a}_1 - 4\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ が読み取れる. 従って, $-\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}11\\ 18\\ 25\end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ となり, $W_1 \cap W_2$ の 1 つの基底として $\left(\begin{bmatrix}11\\ 18\\ 25\end{bmatrix}\right)$ がとれる. ここで, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}11\\ 18\\ 25\end{bmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$ であるから, $\boldsymbol{u}$ の基底 $\mathscr{A}$, 基底 $\mathscr{B}$ に関する座標はそれぞれ $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix}-1\\ 4\end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{u}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$ で与えられる.

【別法】 $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ とすれば, $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2$ と書ける. このとき,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ -d_1\\ -d_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \overset{\substack{\text{上で行った}\\ \text{行基本変形}}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ -d_1\\ -d_2\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ -3\\ 1\end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

であるから, 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ は $\boldsymbol{x} = t(-\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2) = t(3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2)$ の形に書ける. よって, $-\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}11\\ 18\\ 25\end{bmatrix}$ を用いて, $W_1 \cap W_2$ の 1 つの基底は $\left(\begin{bmatrix}11\\ 18\\ 25\end{bmatrix}\right)$ で与えられる.

II A を行基本変形により簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 1\\ 2 & -4 & 1 & 4\\ 1 & 5 & -3 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -10 & 5 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 2 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

これより,

- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\frac{t}{2}\\ \frac{t}{2}\\ t\\ 0\end{bmatrix} = \frac{t}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$ (t は任意定数) であるから, $N(A)$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}\right)$, 次元は $\dim N(A) = 1$.
- $R(A)$ の基底は, A の簡約行列の主成分を含む行ベクトルの 2 倍をとって, $([2,\ 0,\ -1,\ 0],\ [0,\ 2,\ -1,\ 0],\ [0,\ 0,\ 0,\ 1])$, 次元は $\dim R(A) = 3$.
- $C(A)$ の基底は, A の簡約行列の主成分のある場所に対応する A の列ベクトル (A の第 $1, 2, 3$ 列) を取って, $\left(\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\ -4\\ 5\\ -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 4\\ 3\\ 2\end{bmatrix}\right)$, 次元は $\dim C(A) = 3$.