

2024年12月11日 実施分

【演習問題の解答例】

- 1 (1) $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 3x + 6y - 5 = 0$ ($y = \varphi(x)$) の両辺を x で微分すると

$$4x + y + xy' + 2yy' + 3 + 6y' = 0 \quad \therefore \varphi'(x) = y' = -\frac{4x + y + 3}{x + 2y + 6} \quad (*)$$

を得る．特に， $\varphi'(1) = -\frac{4+3}{1+6} = -1$ より，求める接線と法線の方程式はそれぞれ

$$y = \varphi'(1)(x - 1) \quad \therefore y = -x + 1$$

$$y = -\frac{1}{\varphi'(1)}(x - 1) \quad \therefore y = x - 1$$

$b = \varphi(a)$ とおく．また， $\varphi(x)$ が点 $x = a$ で極値をとれば， $\varphi'(a) = 0$ なので，(*) から， $b = -4a - 3$ をみ
たす．よって， $a \neq 0$ のとき， $\varphi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, -4a-3)}{f_y(a, -4a-3)} = -\frac{4}{a + 2(-4a-3) + 6} = \frac{4}{7a}$ を得る．

- (2) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ ($y = \varphi(x)$) の両辺を x で微分すると

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \quad \therefore \varphi'(x) = y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2} \quad (*)$$

を得る．特に， $\varphi'(\sqrt[3]{3}) = \frac{(\sqrt[3]{3})^2}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3}$ より，求める接線と法線の方程式はそれぞれ

$$y = \varphi'(\sqrt[3]{3})(x - \sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{3}x - \sqrt[3]{9}, \quad y = -\frac{1}{\varphi'(\sqrt[3]{3})}(x - \sqrt[3]{3}) = -\frac{x}{\sqrt[3]{3}} + 1$$

$b = \varphi(a)$ とおく．また， $\varphi(x)$ が点 $x = a$ で極値をとれば， $\varphi'(a) = 0$ なので，(*) から， $b = a^2$ をみ
たす．よって， $a \neq 0, 1$ のとき， $\varphi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, a^2)}{f_y(a, a^2)} = -\frac{6a}{3(a^2)^2 - 3a} = \frac{2}{1 - a^3}$ を得る．

- (3) $f(x, y) = 2x^3 - x^2y + y^2 = 0$ ($y = \varphi(x)$) の両辺を x で微分すると

$$6x^2 - 2xy - x^2y' + 2yy' = 0 \quad \therefore \varphi'(x) = y' = \frac{2x(3x - y)}{x^2 - 2y} \quad (*)$$

を得る．特に， $\varphi'(-1) = \frac{(-2)(-2)}{1+2} = \frac{4}{3}$ より，求める接線と法線の方程式はそれぞれ

$$y - (-1) = \varphi'(-1)(x + 1) \quad \therefore y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y - (-1) = -\frac{1}{\varphi'(-1)}(x + 1) \quad \therefore y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$$

$b = \varphi(a)$ とおく．また， $\varphi(x)$ が点 $x = a$ で極値をとれば， $\varphi'(a) = 0$ なので，(*) から， $a = 0$ または
 $b = 3a$ をみたす．ここで， $a = 0$ のとき， $b = 0$ より， $\varphi'(0)$ は存在しない．よって， $a \neq 0, 6$ のとき，
 $\varphi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, 3a)}{f_y(a, 3a)} = -\frac{12a - 2(3a)}{-a^2 + 2(3a)} = \frac{6}{a - 6}$ を得る．

- (4) $f(x, y) = x^4 - 2x^2y + y^3 = 0$ ($y = \varphi(x)$) の両辺を x で微分すると

$$4x^3 - 4xy - 2x^2y' + 3y^2y' = 0 \quad \therefore \varphi'(x) = y' = \frac{4x(x^2 - y)}{2x^2 - 3y^2} \quad (*)$$

を得る．特に， $\varphi'(1) = 0$ より， $(1, 1)$ における接線の方程式は $y = 1$ であり，法線の方程式は $x = 1$ である．

$b = \varphi(a)$ とおく．また， $\varphi(x)$ が点 $x = a$ で極値をとれば， $\varphi'(a) = 0$ なので，(*) から， $a = 0$ または
 $b = a^2$ をみたす．ここで， $a = 0$ のとき， $b = 0$ より， $\varphi'(0)$ は存在しない．よって， $a \neq 0, \pm\sqrt{2/3}$ のと
き， $\varphi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, a^2)}{f_y(a, a^2)} = -\frac{4(3a^2 - a^2)}{-2a^2 + 3(a^2)^2} = \frac{8}{2 - 3a^2}$ を得る．

(5) $f(x, y) = e^{(x-y)^2} + y - e = 0$ ($y = \varphi(x)$) の両辺を x で微分すると

$$2(x-y)(1-y')e^{(x-y)^2} + y' = 0 \quad \therefore \varphi'(x) = y' = \frac{2(x-y)e^{(x-y)^2}}{2(x-y)e^{(x-y)^2} - 1} \quad (*)$$

を得る．特に， $\varphi'(1) = \frac{2e}{2e-1}$ より，求める接線と法線の方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} y &= \varphi'(0)(x-1) & \therefore y &= \frac{2e}{2e-1}x - \frac{2e}{2e-1} \\ y &= -\frac{1}{\varphi'(0)}(x-1) & \therefore y &= -\frac{2e-1}{2e}x + \frac{2e-1}{2e}. \end{aligned}$$

$b = \varphi(a)$ とおく．また， $\varphi(x)$ が点 $x = a$ で極値をとれば， $\varphi'(a) = 0$ なので，(*) から， $b = a$ をみtas. よって， $\varphi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, a)}{f_y(a, a)} = -\frac{2}{1} = -2$ を得る．

2 (1) 1 (1) より

$$0 = f(a, b) = f(a, -4a-3) = 14(a^2-1) \quad \therefore a = \pm 1$$

がわかる．よって， $\varphi''(1) = \frac{4}{7} > 0$ ， $\varphi''(-1) = -\frac{4}{7} < 0$ から， $\varphi(x)$ は点 $x = 1$ で極小値（かつ最小値） -7 をとり，点 $x = -1$ で極大値（かつ最大値） 1 をとる．なお，曲線 $f(x, y) = 0$ は楕円を表す．

(2) 1 (2) より

$$0 = f(a, b) = f(a, a^2) = (a^3+1)(a^3-3) \quad \therefore a = -1, \sqrt[3]{3}$$

がわかる．よって， $\varphi''(-1) = 1 > 0$ ， $\varphi''(\sqrt[3]{3}) = -1 < 0$ から， $\varphi(x)$ は点 $x = -1$ で極小値 1 をとり，点 $x = \sqrt[3]{3}$ で極大値 $(\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{9}$ をとる．なお，曲線 $f(x, y) = 0$ はデカルトの正葉線の1つである．

(3) 1 (3) より

$$0 = f(a, b) = f(a, 3a) = a^2(9-a) \quad \therefore a = 0, 9$$

がわかる．よって， $\varphi''(9) = 2 > 0$ から， $\varphi(x)$ は点 $x = 9$ で極小値 27 をとる．

(4) 1 (4) より

$$0 = f(a, b) = f(a, a^2) = a^4(a^2-1) \quad \therefore a = 0, \pm 1$$

がわかる．よって， $\varphi''(\pm 1) = -8 < 0$ から， $\varphi(x)$ は点 $x = \pm 1$ で極大値（かつ最大値） 1 をとる．ここで， $0 \leq x^2 = \varphi(x) \pm |\varphi(x)|\sqrt{1-\varphi(x)}$ なので， $\varphi(x) \leq 1$ に注意する．

(5) 1 (5) より

$$0 = f(a, b) = f(a, a) = 1 + a - e \quad \therefore a = e - 1$$

がわかる．よって， $\varphi''(e-1) = -2 < 0$ から， $\varphi(x)$ は点 $x = e-1$ で極大値 $e-1$ をとる．

3 (6) (i) 最初に， $f(x, y)$ が極値をとる可能性のある点 (a, b) の候補をラグランジュの未定乗数法で求める．つまり，条件 $g(x, y) = 0$ の下で， $f(x, y)$ がある点 (a, b) で極値をとると仮定する．そのとき， $a^2 + b^2 = 2$ から， $g_x(a, b) = 2a \neq 0$ または $g_y(a, b) = 2b \neq 0$ をみtas.ので， $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とおくと，ラグランジュの未定乗数法により，ある実数 α が存在して

$$0 = F_x(a, b, \alpha) = a(3a-2\alpha), \quad 0 = F_y(a, b, \alpha) = b(3b-2\alpha), \quad 0 = -F_\lambda(a, b, \alpha) = g(a, b) = a^2 + b^2 - 2$$

が成り立つ．ここで， $ab = 0$ のとき， $a^2 + b^2 = 2$ より， $(a, b) = (0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, 0)$ を得る． $ab \neq 0$ のとき， $a = b = \frac{2}{3}\alpha$ なので， $0 = g(a, b) = \frac{8}{9}\alpha^2 - 2$ から， $a = b = \pm 1$ で， $(a, b) = (1, 1), (-1, -1)$ がわかる．

(ii) $C = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ は閉曲線（＝閉じた曲線）なので，この曲線を1周するときの値の変化を見れば極大，極小が判定できる．実際，点 (x, y) を円 C に沿って反時計回りに移動させれば， $f(x, y)$ の値は

(x, y)	$(\sqrt{2}, 0)$	$\cdots$	$(1, 1)$	$\cdots$	$(0, \sqrt{2})$	$\cdots$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$\cdots$	$(-1, -1)$	$\cdots$	$(0, -\sqrt{2})$	$\cdots$	$(\sqrt{2}, 0)$
$f(x, y)$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$

と変化するので、各候補点での極大・極小が次のように判定される．点 $(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2})$ で極大値 (かつ最大値) $2\sqrt{2}$ をとり、点 $(-\sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2})$ で極小値 (かつ最小値) $-2\sqrt{2}$ をとる．更に、点 $(1, 1)$ で極小値 2 をとり、点 $(-1, -1)$ で極大値 -2 をとる．

(ii)' 以下では C が閉曲線でない場合にも対応できるように、 $g(x, y) = 0$ の陰関数を利用して直接、極値の判定を実行する．例えば、候補点 $(1, 1)$ での状況を調べてみよう． $(1, 1)$ の近傍 $D_r(1, 1) = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < r^2\}$ で、 $g(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ をとり ($g_y(1, 1) \neq 0$ に注意)、 $f(x, y)$ を 1 変数化した関数 $h(x) = f(x, \varphi(x)) = x^3 + \{\varphi(x)\}^3$ を考える． $h(x)$ は $(1, 1)$ の近傍で $f(x, y)$ に条件 $g(x, y) = 0$ を組み込んだ関数であるから、 $(1, 1)$ での極大・極小を判定するには $h''(1)$ の符号を調べればよい．ここで、 $h'(x) = 3[x^2 + \{\varphi(x)\}^2 \varphi'(x)]$ 、 $h''(x) = 3[2x + 2\varphi(x)\{\varphi'(x)\}^2 + \{\varphi(x)\}^2 \varphi''(x)]$ であり、 $\varphi'(1), \varphi''(1)$ は $g(x, \varphi(x)) = 0$ の両辺を x で 2 回微分することで計算される ($\varphi(1) = 1$ に注意)．これが以下の方針である．

$$0 = \frac{d}{dx}g(x, \varphi(x)) = \frac{d}{dx}\{x^2 + \varphi(x)^2 - 2\} = 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) \quad \therefore \varphi'(1) = -\frac{1}{\varphi(1)} = -1$$

ここで、当然ながら、 $h'(1) = 0$ をみたしている (ラグランジュの未定乗数法が保証)．更に、 x で微分すると

$$0 = \frac{d^2}{dx^2}g(x, \varphi(x)) = 2 + 2\{\varphi'(x)\}^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \quad \therefore \varphi''(1) = -\frac{1 + \{\varphi'(1)\}^2}{\varphi(1)} = -2$$

を得る．よって、 $h''(1) = 3[2 + 2\varphi(1)\{\varphi'(1)\}^2 + \{\varphi(1)\}^2 \varphi''(1)] = 3(2 + 2 - 2) = 6 > 0$ なので、 $h(x)$ は $x = 1$ で極小値 $h(1) = 2$ をとる．つまり、 $f(x, y)$ は点 $(1, 1)$ で極小値 $f(1, 1) = h(1) = 2$ をとる．点 $(-1, -1)$ でも全く同様にして、 $f(x, y)$ は点 $(-1, -1)$ で極大値 $f(-1, -1) = -2$ をとることがわかる．2 点 $(0, \pm\sqrt{2})$ でも同様であり、 $f(x, y)$ は点 $(0, \sqrt{2})$ で極大値 $f(0, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ をとり、点 $(0, -\sqrt{2})$ で極小値 $f(0, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ をとることがわかる．2 点 $(\pm\sqrt{2}, 0)$ では、 $g_y(\pm\sqrt{2}, 0) = 0$ なので、 $g(x, y) = 0$ の陰関数 $x = \psi(y)$ をとる必要があるが、考え方は前の場合と同じであり、 $f(x, y)$ は点 $(\sqrt{2}, 0)$ で極大値 $f(\sqrt{2}, 0) = 2\sqrt{2}$ をとり、点 $(-\sqrt{2}, 0)$ で極小値 $f(-\sqrt{2}, 0) = -2\sqrt{2}$ をとることが示される．

- (8) (i) 最初に、 $f(x, y)$ が極値をとる可能性のある点 (a, b) の候補をラグランジュの未定乗数法で求める．つまり、条件 $g(x, y) = 0$ の下で、 $f(x, y)$ がある点 (a, b) で極値をとると仮定する．そのとき、 $a^2 - b^2 = 1$ から、 $g_x(a, b) = 2a \neq 0$ をみたすので、 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + (y-2)^2 - \lambda(x^2 - y^2 - 1)$ とおくと、ラグランジュの未定乗数法により、ある実数 α が存在して

$$0 = F_x(a, b, \alpha) = 2a(1 - \alpha), \quad 0 = F_y(a, b, \alpha) = 2(b-2) + 2\alpha b, \quad 0 = -F_\lambda(a, b, \alpha) = g(a, b) = a^2 - b^2 - 1$$

が成り立つ．ここで、最初の式と $a \neq 0$ より $\alpha = 1$ となり、2 番目の式より $b = 1$ を得る．このとき、3 番目の式から、 $a = \pm\sqrt{2}$ ．したがって、極値をとる可能性のある点は $(a, b) = (\pm\sqrt{2}, 1)$ の 2 点である．

(ii) $(\sqrt{2}, 1)$ で極値をとるか調べるために、 $(\sqrt{2}, 1)$ の近くでの $g(x, y) = 0$ の陰関数を $y = \varphi(x)$ とし、 $f(x, y)$ を 1 変数化した関数 $h(x) = f(x, \varphi(x)) = x^2 + (\varphi(x) - 2)^2$ を考える．

$$h'(x) = 2x + 2(\varphi(x) - 2)\varphi'(x), \quad h''(x) = 2 + 2\{\varphi'(x)\}^2 + 2(\varphi(x) - 2)\varphi''(x)$$

であるから、 $h''(\sqrt{2})$ を計算するために、 $\varphi'(\sqrt{2})$ と $\varphi''(\sqrt{2})$ を計算する．($\varphi(\sqrt{2}) = 1$ に注意)．

$$0 = \frac{d}{dx}g(x, \varphi(x)) = \frac{d}{dx}\{x^2 - \varphi(x)^2 - 1\} = 2x - 2\varphi(x)\varphi'(x) \quad \therefore \varphi'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

ここで、当然ながら、 $h'(\sqrt{2}) = 0$ が成り立つ (ラグランジュの未定乗数法が保証)．更に、 x で微分すると

$$0 = \frac{d^2}{dx^2}g(x, \varphi(x)) = 2 - 2\{\varphi'(x)\}^2 - 2\varphi(x)\varphi''(x) \quad \therefore \varphi''(\sqrt{2}) = -1$$

を得る．よって、 $h''(\sqrt{2}) = 2 + 2\{\varphi'(\sqrt{2})\}^2 + 2(\varphi(\sqrt{2}) - 2)\varphi''(\sqrt{2}) = 8 > 0$ なので、 $h(x)$ は $x = \sqrt{2}$ で極小値 $h(\sqrt{2}) = 3$ をとる．つまり、 $f(x, y)$ は点 $(\sqrt{2}, 1)$ で極小値 $f(\sqrt{2}, 1) = h(\sqrt{2}) = 3$ をとる．同様に、 $(-\sqrt{2}, 1)$ の近くでの $g(x, y) = 0$ の陰関数を $y = \varphi(x)$ とし、 $f(x, y)$ を 1 変数化した関数 $h(x) = f(x, \varphi(x)) = x^2 + (\varphi(x) - 2)^2$ を考えると、 $\varphi(-\sqrt{2}) = 1$ 、 $\varphi'(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ 、 $\varphi''(-\sqrt{2}) = -1$ より、 $h''(-\sqrt{2}) = 8 > 0$ となるので、 $f(x, y)$ は点 $(-\sqrt{2}, 1)$ で極小値 $f(-\sqrt{2}, 1) = 3$ をとる．以上より、 $f(x, y)$ は点 $(\pm\sqrt{2}, 1)$ で極小値 3 をとる．

【レポート課題の解答例】

- 4 (1) まず、陰関数の定義により、 $\varphi(4) = 5$ である。次に、

$$x^2 + y^2 - xy - 21 = 0 \quad (y = \varphi(x)) \quad (*)$$

の両辺を x で微分すると、 $2x + 2yy' - y - xy' = 0$ 。よって、

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y} \quad \left(\text{すなわち } \varphi'(x) = \frac{2x - \varphi(x)}{x - 2\varphi(x)} \right)$$

となるので、 $\varphi'(4) = -\frac{1}{2}$ 。さらに、 $(*)$ の両辺を x で 2 回微分すると、 $2 + 2(y')^2 - 2y' + (2y - x)y'' = 0$ 。よって、

$$y'' = \frac{2((y')^2 - y' + 1)}{x - 2y} \quad \left(\text{すなわち } \varphi''(x) = \frac{2(\{\varphi'(x)\}^2 - \varphi'(x) + 1)}{x - 2\varphi(x)} \right)$$

となるので、 $\varphi''(4) = -\frac{7}{12}$ 。

- (2) $g_x(x, y) = 2x - y$, $g_y(x, y) = 2y - x$ より、 $g_x(a, b) = g_y(a, b) = 0$ のとき $a = b = 0$ となるが、点 $(a, b) = (0, 0)$ は $g(a, b) = 0$ を満たさないので、極値の候補を求める際にラグランジュの未定乗数法が利用できる。

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - xy - 21)$$

とおく。条件 $g(x, y) = 0$ のもとで $f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をとると仮定すると、ある実数 α が存在して $F_x(a, b, \alpha) = 1 - \alpha(2a - b) = 0$, $F_y(a, b, \alpha) = 2 - \alpha(2b - a) = 0$, $-F_\lambda(a, b, \alpha) = a^2 + b^2 - ab - 21 = 0$ が成り立つ。第 1 式の 2 倍から第 2 式を引くと、 $\alpha(4b - 5a) = 0$ 。第 1 式より $\alpha \neq 0$ なので、 $b = \frac{5}{4}a$ となる。これを第 3 式に代入すると、 $\frac{21}{16}a^2 - 21 = 0$ となり、 $a = \pm 4$ 。よって、極値をとる点の候補は $(a, b) = (4, 5), (-4, -5)$ である。

点 $(4, 5)$ で極値をとるかどうか調べるために、 $(4, 5)$ の近くでの $g(x, y) = 0$ の陰関数を $y = \varphi(x)$ とし、 $f(x, y)$ を 1 変数化した関数 $h(x) = f(x, \varphi(x)) = x + 2\varphi(x)$ を考える。(1) の結果より、 $\varphi''(4) = -\frac{7}{12}$ なので、 $h''(4) = 2\varphi''(4) = -\frac{7}{6} < 0$ 。(また、ラグランジュの未定乗数法によって保証されたとおり、 $h'(4) = 0$ が成り立っている。) よって、 $h(x)$ は $x = 4$ で極大値 $h(4) = 14$ をとる。つまり、 $f(x, y)$ は $(x, y) = (4, 5)$ で極大値 $f(4, 5) = h(4) = 14$ をとる。

同様に、点 $(-4, -5)$ の近くでの $g(x, y) = 0$ の陰関数を $y = \varphi(x)$ とすると、 $\varphi'(-4) = -\frac{1}{2}$, $\varphi''(-4) = \frac{7}{12}$ となり、 $h'(-4) = 2\varphi'(-4) = \frac{7}{6} > 0$ となるから、 $f(x, y)$ は $(-4, -5)$ で極小値 -14 をとる。(このことは、曲線 $g(x, y) = 0$ が原点对称であることと、 $f(x, y)$ が奇関数 ($f(-x, -y) = -f(x, y)$) であることからわかる。) 以上より、 $f(x, y)$ は点 $(4, 5)$ で極大値 14 をとり、点 $(-4, -5)$ で極小値 -14 をとる。