

数学演習第二 (演習第9回)

線形：線形写像, 核と像 2024 年 12 月 18 日

要点

V, W を ベクトル空間 とする. また, $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ をそれぞれ V, W の零ベクトルとする.

〈線形写像の定義〉 (線形教科書 p. 142)

- 写像 $f: V \rightarrow W$ が **線形写像** であるとは

$$(i) \ f(x + x') = f(x) + f(x') \quad (x, x' \in V), \quad (ii) \ f(kx) = kf(x) \quad (x \in V, k \in \mathbb{R})$$

の 2 条件 (**線形性**) を満たすことをいう. 特に $V = W$ のとき f を V の **線形変換** とよぶことがある.

〈線形写像の決定〉 (線形教科書 p. 145)

- $(a_1, \dots, a_n)$ を V の 1 組の 基底 とする. このとき, 任意の $b_1, \dots, b_n \in W$ に対して,

$$f(a_1) = b_1, \dots, f(a_n) = b_n$$

を満たす線形写像 $f: V \rightarrow W$ がただ 1 つ存在する.

〈線形写像の核, 像〉 (線形教科書 pp. 139–142, 147–154)

- $f: V \rightarrow W$ が線形写像のとき,

(1) $\text{Ker } f := \{x \in V \mid f(x) = \mathbf{0}_W\}$ (V の部分空間) を f の **核** という.

(2) $\text{Im } f := f(V) = \{f(x) \mid x \in V\}$ (W の部分空間) を f の **像** という.

- 集合 X から Y への写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ に対して,

(1) φ が **単射** であるとは, 任意の $x, x' \in X$ に対して $x \neq x' \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと.

(2) φ が **全射** であるとは, 任意の $y \in Y$ に対して $\varphi(x) = y$ となる $x \in X$ が存在すること.

(3) φ が全射かつ単射であるとき **全単射** であるという.

$f: V \rightarrow W$ が線形写像のときには次が成り立つ.

(1) f が単射 $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\mathbf{0}_V\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 0$.

(2) f が全射 $\Leftrightarrow \text{Im } f = W \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = \dim W$.

(3) $\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$

《列ベクトル空間の間の線形写像》

- $m \times n$ 行列 A に対して, 写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を $f_A(x) = Ax$ で定義すれば, f_A は線形写像である (f_A を **行列 A の定める線形写像** とよぶ). 逆に, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像のとき,

$$A = [f(e_1) \ \cdots \ f(e_n)] \quad (e_1, \dots, e_n \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の基本ベクトル (標準基底)})$$

と定めれば, $f(x) = f_A(x)$ が成り立つ (f は行列 A の定める線形写像 f_A と一致する). 従って, 列ベクトル空間の間の線形写像はすべて “行列の掛け算” によって与えられる.

- $A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$ を $m \times n$ 行列とする. 行列 A の定める線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して,

(1) $\text{Ker } f_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \mathbf{0}\} = N(A)$ (A の零空間).

(2) $\text{Im } f_A = \langle f_A(e_1), \dots, f_A(e_n) \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle = C(A)$ (A の列空間).

さらに, $\dim \text{Im } f_A = \text{rank } A$ であって, 次が成り立つ.

(1) f_A が単射 $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$. (2) f_A が全射 $\Leftrightarrow \text{rank } A = m$.

(3) A が正方行列 ($m = n$) のとき, f_A が単射 $\Leftrightarrow f_A$ が全射 $\Leftrightarrow A$ が正則.

例1 要点の《列ベクトル空間の間の線形写像》にある次の事実を確認する.

- A が $m \times n$ 行列であるとき, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定まる $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は線形写像である. 実際,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}'), \quad f(k\mathbf{x}) = A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} = kf(\mathbf{x}).$$
- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像ならば, $A = [f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)]$ において $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ が成り立つ. 実際, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ を $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ と表せば, f の線形性により,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1f(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nf(\mathbf{e}_n) = [f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

例2 $\mathbb{R}[x]_n$ を変数 x の n 次以下の実係数多項式全体の作るベクトル空間とする.

- 写像 $D: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_{n-1}$ を $p(x) \mapsto p'(x)$ によって定めれば, D は線形写像である. 実際,

$$\{p(x) + q(x)\}' = p'(x) + q'(x), \quad \{kp(x)\}' = kp'(x).$$
- 写像 $I: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_{n+1}$ を $p(x) \mapsto \int_0^x p(t) dt$ によって定めれば, I は線形写像である. 実際,

$$\int_0^x \{p(t) + q(t)\} dt = \int_0^x p(t) dt + \int_0^x q(t) dt, \quad \int_0^x kp(t) dt = k \int_0^x p(t) dt.$$

例3 $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を求める.

($\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ は明らかに $\mathbb{R}^2$ の基底であるから, 条件を満たす線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ がただ1つ存在する.)

方法1 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする. まず, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を満たす c_1, c_2 を求める. これを変形して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

が得られるから,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (2x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left((2x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = (2x_1 - x_2)f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (-x_1 + x_2)f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= (2x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

方法2 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ はある 3×2 行列 A を用いて $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$) の形で与えられる. この行列 A を求めよう.

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{より,} \quad A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

であるから,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

演習問題

1 以下の写像が線形写像になるかどうか調べよ. (演習書 問題 12.1.1 類題)

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 + x_2 + (x_1)^2$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(4) $T(p(x)) = p(x+1)$ で定義される写像 $T: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$.

2 $m \times n$ 行列 A を次のように定めるとき, それぞれの A が定める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ について以下の設問に答えよ. (演習書 問題 12.2.4 類題)

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(1) $\text{Ker } f$ の基底と次元を求めよ. ($\{\mathbf{0}\}$ の場合, 基底は無し, 次元は 0 であることに注意)

(2) $\text{Im } f$ の基底と次元を求めよ.

(3) f は単射であるかを調べよ. また, 全射であるかを調べよ.

3 (1) k を実数とする.

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ k \end{bmatrix}$$

を満たす線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を, 例 3 (裏面) で示された 2 つの方法で求めよ.

(2) (1) の f が単射にならないための k の条件を求めよ. さらに, k がその条件を満たすとき, $\text{Im } f$ の次元と基底を求めよ.

4 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ について, 次のもの (f_A による像) を求

めよ. ただし, $\mathbb{R}^3$ の点 (x, y, z) とベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を同一視する.

(1) 点 $(1, -1, 2)$ の像.

(2) 直線 $\ell: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{4}$ の像. (まず直線の方程式を $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ の形に表せ.)

(3) 平面 $\alpha: x + 3y - 2z = 4$ の像. (まず平面の方程式を $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ の形に表せ.)

(4) $\mathbb{R}^3$ の像.

5 2つの線形写像 $D: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, $M: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ をそれぞれ

$$D(p(x)) = p'(x), \quad M(p(x)) = \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt$$

で定義する. 次の設問に答えよ.

(1) $\text{Ker}(M \circ D)$ の基底と次元を求めよ.

(2) $\text{Im}(D \circ M)$ の基底と次元を求めよ.

レポート課題

- 答だけでなく, 計算の過程も書いて下さい. (A4 用紙1~2枚にまとめ, pdf ファイルに変換して提出)
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります.

I $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ に対して, 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が

$$f(a_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(a_2) = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

を満たすとする. このような f を行列を用いて表せ.

II 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ の定める $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $f_A(x) = Ax$ について考える.

(1) $\text{Ker } f_A$ の基底と次元を求めよ.

(2) $\text{Im } f_A$ の基底と次元を求めよ.

III 2つの線形写像 $f: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, $g: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ で, $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}[x]_2}$ をみたすが, f は単射でなく, g も全射でない, f, g の具体例をそれぞれ与えよ.