数学演習第二（演習第９回） 【解答例】

線形：線形写像, 核と像　　2024 年 12 月 18 日

演習問題

$\boxed{1}$ (1) 例えば, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 0$ より, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 0$,
$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2$. よって, $\underline{f \text{ は線形写像でない}}$.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ と行列の掛け算で表されるので, $\underline{f \text{ は線形写像である}}$.

次のように線形写像の条件を確認してもよい．任意の $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_1') + (x_2 + x_2') \\ (x_1 + x_1') + (x_3 + x_3') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + (x_1' + x_2') \\ (x_1 + x_3) + (x_1' + x_3') \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' + x_3' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}\right),$$

$$f\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1 + kx_2 \\ kx_1 + kx_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} = kf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$$

が成り立つ．よって, $\underline{f \text{ は線形写像である}}$.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となるので, $\underline{f \text{ は線形写像でない}}$.

(4) 任意の $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, $k \in \mathbb{R}$ に対して, $r(x) = p(x) + q(x)$, $s(x) = kp(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ とおけば,

$$T(p(x) + q(x)) = T(r(x)) = r(x+1) = p(x+1) + q(x+1) = T(p(x)) + T(q(x)),$$
$$T(kp(x)) = T(s(x)) = s(x+1) = kp(x+1) = kT(p(x))$$

が成り立つ．よって, $\underline{T \text{ は線形写像である}}$.

$\boxed{2}$ (i) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. よって, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$,
$\operatorname{Ker} f$ の基底は無く, $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 0}$ である.

(2) $\operatorname{Im} f = C(A)$ の基底は A の 2 つの列ベクトルの中から 1 次独立な最大個数の組を選べばよい．A の簡約行列の主成分は第 1 列と第 2 列にあるので, 2 つの列ベクトルから 1 番目と 2 番目を選んだ組, すなわち $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right)}$ を $\operatorname{Im} f$ の基底として選ぶことができる．よって, $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2}$.

(3) $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, $\dim \operatorname{Im} f = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ なので, $\underline{f \text{ は単射であるが全射でない}}$.

(ii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であるから, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみ．すなわち, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$,
$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 0}$ である．($\operatorname{Ker} f$ の基底は無し)

(2) A の簡約行列の主成分がすべての列にあるから, $\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができ, $\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f = 3}$. ($\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$ であるから, $\mathrm{Im}\, f$ の基底として, $\mathbb{R}^3$ の標準基底を選んでもよい.)

(3) $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$, $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^3$ なので, $\underline{f \text{ は単射かつ全射 (全単射) である}}$.

【注意】線形変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対しては, 単射であることと全射であることは同値である（系 22.7).

(iii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ なので, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ と表される. よって, $\mathrm{Ker}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができ, $\boxed{\dim \mathrm{Ker}\, f = 1}$ である.

(2) A の簡約行列の主成分の位置を見て, A の 1 番目, 2 番目の列ベクトルを取れば $\mathrm{Im}\, f$ の基底となることが分かる. $\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができ, $\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f = 2}$ である.

(3) $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1 \neq 0$, $\dim \mathrm{Im}\, f = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ なので, $\underline{f \text{ は単射でも全射でもない}}$.

3 (1) $\boxed{\text{方法 1}}$ 各 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$ を求める. そのために, まず, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ を満たす $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を求めると, $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3x_1 + 2x_2\\2x_1 - x_2\end{bmatrix}$.
よって, f の線形性により,

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = f\left((-3x_1 + 2x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = (-3x_1 + 2x_2)f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) + (2x_1 - x_2)f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$$
$$= (-3x_1 + 2x_2)\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} + (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix}2\\6\\k\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}x_1\\3x_1\\(2k - 15)x_1 + (10 - k)x_2\end{bmatrix}}.$$

$\boxed{\text{方法 2}}$ 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は 3×2 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される. この行列 A を求めよう.

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\6\\k\end{bmatrix} \quad \text{より,} \quad A\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\\5 & k\end{bmatrix}.$$

よって,

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\\5 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\\5 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\\2k - 15 & 10 - k\end{bmatrix}.$$

(2) (1) より, f は行列 $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\\2k - 15 & 10 - k\end{bmatrix}$ を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される. f が単射にならないのは $\dim \mathrm{Ker}\, f \neq 0$ のとき, すなわち $\mathrm{rank}\, A \neq 2$ のときである. A は $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 10 - k\\0 & 0\end{bmatrix}$ と簡約化できるから, 求める条件は $\boxed{k = 10}$. この条件が成り立つとき, $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\\5 & 0\end{bmatrix}$ だから, $\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f = 1}$ で, $\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\right)}$ がとれる.

4 (1) $f_A\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}$. よって, 像は $\boxed{\text{点}\ (4,\,5,\,9)}$.

(2) 直線 ℓ 上の点は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}$ と表される.

$$f_A\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}9\\11\\20\end{bmatrix}$$

であるから, 直線 ℓ の像は $\boxed{\text{直線}\ \dfrac{x-4}{9}=\dfrac{y-5}{11}=\dfrac{z-9}{20}}$. (パラメータ表示してもよい.)

(3) 平面 α 上の点は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ と表される. この点の像は

$$f_A\left(\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}.$$

ここで, $\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\\-6\end{bmatrix}\,/\!/\,\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ であるから, 平面 α の像は平面 $(x-4)+(y-4)-(z-8)=0$, すなわち $\boxed{\text{平面}\ x+y-z=0}$.

(4) $\mathbb{R}^3$ の像は $f_A(\mathbb{R}^3)=\operatorname{Im} f_A=C(A)$. A の簡約行列は $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ だから, $f_A(\mathbb{R}^3)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle=\left\{s\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\}$. ここで, $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ より, $\mathbb{R}^3$ の像は $\boxed{\text{平面}\ x+y-z=0}$.

5 (1) $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ とおくと,

$$D(p(x))=a_1+2a_2x+3a_3x^2$$
$$(M\circ D)(p(x))=a_1+a_2x+a_3x^2$$

となる. これより,

$$\begin{aligned}p(x)\in\operatorname{Ker}(M\circ D)\quad&\Leftrightarrow\quad a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0\\&\Leftrightarrow\quad a_0=c,\ a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0\quad(c\ \text{は任意の実数})\\&\Leftrightarrow\quad p(x)\in\langle 1\rangle.\end{aligned}$$

よって, $\operatorname{Ker}(M\circ D)$ の基底として $\boxed{(1)}$ を選ぶことができ, $\boxed{\dim\operatorname{Ker}(M\circ D)=1}$ となる.

(2) $\mathbb{R}[x]_3$ の 1 組の基底として, $\left(1,\,x,\,x^2,x^3\right)$ をとると,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(D\circ M)&=\langle(D\circ M)(1),\,(D\circ M)(x),\,(D\circ M)(x^2),\,(D\circ M)(x^3)\rangle\\&=\left\langle 0,\,\frac{1}{2},\,\frac{2x}{3},\,\frac{3x^2}{4}\right\rangle=\langle 1,\,x,\,x^2\rangle=\mathbb{R}[x]_2\,.\end{aligned}$$

よって, $\operatorname{Im}(D\circ M)$ の基底として $\boxed{\left(1,x,x^2\right)}$ を取ることができ, $\boxed{\dim\operatorname{Im}(D\circ M)=3}$ となる.

レポート問題

I $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3×2 行列 A を求める．与えられた条件より，

$$A\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\5\\-6\end{bmatrix}$$

であるから，このような行列 A は $A\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -4\\-2 & 5\\3 & -6\end{bmatrix}$ を満たす．ここで，先に

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$$

を計算しておき，

$$A = \begin{bmatrix}1 & -4\\-2 & 5\\3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -4\\-2 & 5\\3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}-7 & -3\\8 & 3\\-9 & -3\end{bmatrix}}.$$

II A に行基本変形を施すと，

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2 & -1\\1 & 1 & 3 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & 1 & -2\\0 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となる．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$ $(s, t$ は任意定数$)$ と表される．

よって，$\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\right)}$ が取れ，$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\, f_A = 2}$．

(2) A の簡約行列の主成分をもつ列が第 1 列，第 2 列にある．

よって，$\mathrm{Im}\, f_A$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)}$ が取れ，$\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f_A = 2}$．

【別解】 $\mathrm{Im}\, f_A = C(A)$ (A の列空間) であるから，次のようにして $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底を求めることもできる．A を <u>列基本変形</u> して

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2 & -1\\1 & 1 & 3 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & -2\\1 & 2 & 2 & -4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

これから $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底 $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)}$ を得る．

III $f(p(x)) = p'(x)$, $g(p(x)) = \displaystyle\int_0^x p(t)\,dt$ とすると，$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]_2}$ が成り立つことは微分積分学で周知の事柄で，多項式空間 $\mathbb{R}[x]_2$ においては直接，容易な計算でも確かめられる．また，f が単射でないことは $\mathrm{Ker}\, f = \langle 1\rangle \neq \{\boldsymbol{0}\}$ からわかる．さらに，g が全射でないことは $1 \notin \mathrm{Im}\, g$ から従う．つまり，$g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]_3}$ ということである．しかしながら，$\mathbb{R}[x]_2$, $\mathbb{R}[x]_3$ の代りにそれぞれ部分空間 $\{p \in \mathbb{R}[x]_2 \mid p(0) = 0\}$, $\{p \in \mathbb{R}[x]_3 \mid p(0) = 0\}$ に制限して，上記の f, g を考えれば，f, g は可逆で，互いに逆写像となる．これが標語的に「積分は微分の逆演算」と云われることの正確な定式化である．$p(x)$ は多項式である必要がなく，C^1 級の関数で十分なことにも注意しよう．