数学演習第二（演習第 11 回）

線形：線形写像の表現行列, 基底変換行列, 表現行列と座標

2025 年 1 月 8 日

【要点】

V, W をベクトル空間とし, $f\colon V \to W$ を線形写像とする.

〈線形写像の表現行列〉 (線形教科書 p.155–158)

V の基底 $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ と W の基底 $\mathscr{C} = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)$ が与えられているとする. このとき, $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ の f による像 $f(\boldsymbol{b}_i)$ は $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m$ の 1 次結合として

$$f(\boldsymbol{b}_i) = a_{1i}\boldsymbol{c}_1 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{c}_m = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = [f(\boldsymbol{b}_i)]_{\mathscr{C}} \text{ に注意} \right)$$

の形に表される. $i = 1, 2, \dots, n$ に対する式をまとめて書くと

$$\boxed{(f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)) = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)A}, \quad A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

右辺に現れる $m \times n$ 行列 A を線形写像 $f\colon V \to W$ の $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ に関する**表現行列**という. 特に, $V = W$ (従って $n = m$) かつ $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ のとき, n 次正方行列 A を線形変換 $f\colon V \to V$ の $\mathscr{B}$ に関する表現行列という.

[例]　$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ の**標準基底**を

$$\mathscr{E}_3 = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathscr{E}_2 = \left(\boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

と表すとき,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{bmatrix}$$

で定まる線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を考える.

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \ f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

であるから,

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

よって, f の $\mathscr{E}_3, \mathscr{E}_2$ に関する表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ である. (この例のように, 数ベクトル空間の間の線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を考えるとき, f の標準基底に関する表現行列を**標準行列**とよぶ.)

〈表現行列と座標〉(線形教科書 p.158–160)

V の基底 $\mathscr{B}$, W の基底 $\mathscr{C}$ をとり, $f\colon V \to W$ の $\mathscr{B},\mathscr{C}$ に関する表現行列を A とする．このとき, $\boldsymbol{x} \in V$ の $\mathscr{B}$ に関する座標を $[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}}$ とし, $f(\boldsymbol{x}) \in W$ の $\mathscr{C}$ に関する座標を $[f(\boldsymbol{x})]_{\mathscr{C}}$ とすると

$$\boxed{[f(\boldsymbol{x})]_{\mathscr{C}} = A\,[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}}} \quad (\boldsymbol{x} \in V)$$

が成り立つ．($\dim V = n$, $\dim W = m$ なら, $[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}} \in \mathbb{R}^n$, $[f(\boldsymbol{x})]_{\mathscr{C}} \in \mathbb{R}^m$ で, A は $m \times n$ 行列)

〈基底変換行列〉(線形教科書 p.162–164)

V の 2 つの基底 $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$, $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n)$ に対して, $\boldsymbol{b}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の 1 次結合として

$$\boldsymbol{b}'_i = p_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + p_{ni}\boldsymbol{b}_n = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{b}'_i]_{\mathscr{B}} \text{ に注意} \right)$$

の形に表される．$i = 1, 2, \ldots, n$ に対する式をまとめて書くと

$$\boxed{(\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)P}, \qquad P := \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

右辺に現れる n 次正則行列 P を $\mathscr{B}$ から $\mathscr{B}'$ への**基底変換行列**という．(P^{-1} は $\mathscr{B}'$ から $\mathscr{B}$ への基底変換行列となる.) このとき, 線形写像 $f\colon V \to W$ に対して

$$\boxed{(f(\boldsymbol{b}'_1), \ldots, f(\boldsymbol{b}'_n)) = (f(\boldsymbol{b}_1), \ldots, f(\boldsymbol{b}_n))P}$$

となる．また, $\boldsymbol{x} \in V$ の $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ に関する座標をそれぞれ $[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}}, [\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}'}$ とすると,

$$\boxed{[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}} = P[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}'}} \quad (\boldsymbol{x} \in V)$$

が成り立つ.

〈基底の変換と表現行列〉(線形教科書 p.164–166)

- $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ を V の基底とし, $\mathscr{B}$ から $\mathscr{B}'$ への基底変換行列を P とする.
- $\mathscr{C},\mathscr{C}'$ を W の基底とし, $\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}'$ への基底変換行列を Q とする.
- $\mathscr{B},\mathscr{C}$ に関する f の表現行列を A とし, $\mathscr{B}',\mathscr{C}'$ に関する f の表現行列を A' する.

このとき, $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$ が成り立つ.

《注意》

- 丸枠で囲まれた式は表現行列 A, 基底変換行列 P の「定義」であり, 他の 角枠 で囲まれた式はそれらに関する「定理」と考えられる.
- V, W が数ベクトル空間またはその部分空間であるとき, $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ や $(f(\boldsymbol{b}_1), \ldots, f(\boldsymbol{b}_n))$ は数ベクトルを並べてできる行列と解釈して計算してよい.

演習問題

0 【要点】の最後の項目に現れる等式 $A' = Q^{-1}AP$ を示せ.

1 (1) 次で与えられる $\mathbb{R}^2$ の 2 つの基底 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ について, $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への基底変換行列を求めよ.

$$\mathscr{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right), \qquad \mathscr{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + 2z = 0 \right\}$ の 2 つの基底を考える:

$$\mathscr{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \quad \mathscr{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

(i) $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への基底変換行列を求めよ.

(ii) $\boldsymbol{x} \in W$ の $\mathscr{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{A}}$ が $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ のとき, $\mathscr{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}}$ を s, t で表せ.

2 次で与えられる $\mathbb{R}^3$ のベクトルを考える:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

このとき, $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ はともに $\mathbb{R}^3$ の基底となる.

(1) 基底 $\mathscr{A}$ に関する $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の座標をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への基底変換行列 P を求めよ.

(3) 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する:

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathscr{C} = \left(\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ を考え, $\mathscr{C}$ に関する $f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)$ の座標を求めることにより, $\mathscr{A}, \mathscr{C}$ に関する f の表現行列 M_1 を求めよ.

(4) $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ に関する f の表現行列 M_2 を求めよ.

(5) 線形写像 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x - 2y \\ -4x - 4y \\ 5x + 12y \end{bmatrix}$$

で定義する. $\mathscr{C}, \mathscr{A}$ に関する g の表現行列 N を求めよ.

3 $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を基底とするベクトル空間 V を考え, V の別の基底 $\mathscr{B}$ を次で定義する:

$$\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3).$$

(1) $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ から $\mathscr{A}$ への基底変換行列をそれぞれ求めよ.

(2) 線形写像 $f : V \to V$ の $\mathscr{A}$ に関する表現行列が $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ であるとする.

(i) $\mathscr{B}$ に関する f の表現行列 M' を求めよ.

(ii) $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め, 基底の一例を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を用いて与えよ.

4 2 次以下の実数係数多項式 (変数 x) の全体のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ と書く. 線形変換 $L\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を

$$L(p(x)) = 2p(x) + (1-x)p'(x) \quad (p(x) \in \mathbb{R}[x]_2).$$

で定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$ に関する L の表現行列 A を求めよ.

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ の別の基底 $\mathscr{C} = (1+x,\ x+x^2,\ x^2)$ に関する L の表現行列 B を求めよ.

レポート課題

- 答だけでなく, 計算の過程も書いて下さい. （A4 用紙１〜２枚にまとめ, pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass** に提出して「出席」となります.

I $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ および $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\mathscr{B} = \left(\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

について, 次の問いに答えよ. 但し, $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathscr{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ と表す.

(1) $\mathscr{E}$ から $\mathscr{B}$ への基底変換行列 P, および $\mathscr{B}$ から $\mathscr{E}$ への基底変換行列 Q を求めよ.

(2) $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{e}_1]_{\mathscr{B}}$, $[\boldsymbol{e}_2]_{\mathscr{B}}$, $[\boldsymbol{e}_3]_{\mathscr{B}}$ を求めよ.

(3) f の基底 $\mathscr{E}$ に関する表現行列 A, および基底 $\mathscr{B}$ に関する表現行列 B を求めよ.