数学演習第二（演習第 11 回）

線形：線形写像の表現行列, 基底変換行列, 表現行列と座標

2025 年 1 月 8 日

演習問題

0 表現行列, 基底変換行列の性質を用いて, $QA' = AP$ を示す.

［方法１］ $(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)QA' = (\boldsymbol{w}'_1, \dots, \boldsymbol{w}'_m)A' = (f(\boldsymbol{v}'_1), \dots, f(\boldsymbol{v}'_n)) = (f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n))P = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n)AP$. ここで, $(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)$ は W の基底であるから, $QA' = AP$ が成り立つ.

［方法２］ 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $QA'[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}'} = Q[f(\boldsymbol{x})]_{\mathscr{C}'} = [f(\boldsymbol{x})]_{\mathscr{C}} = A[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}} = AP[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}'}$. ここで, $\boldsymbol{x}$ が V 全体を動くとき $[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}'}$ は $\mathbb{R}^n$ 全体を動くので, $QA' = AP$ が成り立つ.

1 (1) $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\,P$ となる行列 P が求めるもの. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ が成り立つから,

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}.$$

(2) (i) $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)P$ となる P を求めるには, $i = 1, 2$ に対して, 連立１次方程式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_i$ を解けばよい. このとき $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{b}_i]_{\mathscr{A}}$ $(i = 1, 2)$ であり, $P = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}} & [\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{A}} \end{bmatrix}$ となる. 行基本変形により

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

であるから, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり, $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への基底変換行列は

$$P = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}} & [\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) $[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{A}} = P[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}}$ であるから,

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{B}} = P^{-1}[\boldsymbol{x}]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 2t \\ -s - t \end{bmatrix}.$$

2 (1) 連立１次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \overbrace{[\boldsymbol{b}_i]_{\mathscr{A}}}^{\text{未知}} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ をまとめて解く. 行基本変形により,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 18 & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & -5 & -7 & 2 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 7 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 18 & -18 & 0 & -54 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

となるから,

$$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{b}_3]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}$ であるから, (1) の結果を用いて,

$$P = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}} & [\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{A}} & [\boldsymbol{b}_3]_{\mathscr{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

(3) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix} [f(\boldsymbol{a}_i)]_{\mathscr{C}} = f(\boldsymbol{a}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ であるから, (1) と同様に, 行基本変形により

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{c}_1 \ \ \boldsymbol{c}_2 \ \middle| \ f(\boldsymbol{a}_1) \ \ f(\boldsymbol{a}_2) \ \ f(\boldsymbol{a}_3) \right] &= \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \\ &\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -4 & -2 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

となるから,

$$[f(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [f(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [f(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} [f(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathscr{C}} & [f(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathscr{C}} & [f(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathscr{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

なお, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix}$ の逆行列は

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

と簡単に得られるので,

$$[f(\boldsymbol{a}_i)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix}^{-1} f(\boldsymbol{a}_i) \quad (i = 1, 2, 3), \quad M_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & f(\boldsymbol{a}_3) \end{bmatrix}$$

を計算してもよい.

(4) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}$ であったから, f の線形性と (2) から,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{b}_1) & f(\boldsymbol{b}_2) & f(\boldsymbol{b}_3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & f(\boldsymbol{a}_3) \end{bmatrix} P \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 26 & 7 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ に関する表現行列 M_2 は $\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix} M_2 = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{b}_1) & f(\boldsymbol{b}_2) & f(\boldsymbol{b}_3) \end{bmatrix}$ で与えられるから, (3) と同様に $\left[\boldsymbol{c}_1 \ \ \boldsymbol{c}_2 \ \middle| \ f(\boldsymbol{b}_1) \ \ f(\boldsymbol{b}_2) \ \ f(\boldsymbol{b}_3) \right]$ を簡約化しても, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix}$ の逆行列を利用しても M_2 が計算できる. ここでは後者の方法を用いる:

$$M_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{b}_1) & f(\boldsymbol{b}_2) & f(\boldsymbol{b}_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 26 & 7 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}.$$

(5) $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ の $\mathscr{C}, \mathscr{A}$ に関する表現行列 N は $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} g(\boldsymbol{c}_1) & g(\boldsymbol{c}_2) \end{bmatrix}$ で与えられるから, (3) と同様に $\left[\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3 \ \middle| \ g(\boldsymbol{c}_1) \ \ g(\boldsymbol{c}_2) \right]$ を行基本変形して,

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3 \ \middle| \ g(\boldsymbol{c}_1) \ \ g(\boldsymbol{c}_2) \right] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -8 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 17 & -7 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & 26 & -10 \end{bmatrix} \\ &\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 36 & 0 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

これより, $N = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$ (1) $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ から $\mathscr{A}$ への基底変換行列をそれぞれ P, Q とする.

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)P = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ より}, \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

また, $Q = P^{-1}$ であるから,

$$\begin{bmatrix} P \mid E \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

より, $Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) (i) $(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)M$ であるから, f の線形性に注意して,

$$(f(\boldsymbol{b}_1), f(\boldsymbol{b}_2), f(\boldsymbol{b}_3)) = (f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3))P = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)MP = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)P^{-1}MP.$$

よって,

$$M' = P^{-1}MP = P^{-1}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii)
- M' の零空間 $N(M')$ の次元は 1 で, 基底の一例として $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ がとれる.
- M' の列空間 $C(M')$ の次元は 2 で, 基底の一例として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ がとれる.

これを V の元と対応させて考えれば,
- $\operatorname{Ker} f$ の次元は 1 で, 基底の一例として $(\boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3)$ がとれる.
- $\operatorname{Im} f$ の次元は 2 で, 基底の一例として $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)$ がとれる.

$\boxed{4}$ (1) $(L(1), L(x), L(x^2)) = (2,\ 1 + x,\ 2x) = (1,\ x,\ x^2)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) $(L(1 + x),\ L(x + x^2),\ L(x^2)) = (3 + x,\ 1 + 3x,\ 2x)$

$= (3(1 + x) - 2(x + x^2) + 2x^2,\ (1 + x) + 2(x + x^2) - 2x^2,\ 2(x + x^2) - 2x^2)$

$= (1 + x,\ x + x^2,\ x^2)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ より, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

$\mathscr{B}$ から $\mathscr{C}$ への基底変換行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて $B = P^{-1}AP$ を計算してもよい.

レポート問題

I (1) 基底変換行列の定義により,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}P = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix}Q = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = E$ (単位行列) であるから,

$$P = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}, \qquad Q = P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

ここで, P^{-1} の計算は次の通り:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}P & | & E\end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &\to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right] = \begin{bmatrix}E & | & P^{-1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 座標の定義より,

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix}[\boldsymbol{e}_1]_{\mathscr{B}} = P[\boldsymbol{e}_1]_{\mathscr{B}}. \quad \therefore\ [\boldsymbol{e}_1]_{\mathscr{B}} = P^{-1}\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\ -2\\ -2\end{bmatrix}.$$

同様にして,

$$[\boldsymbol{e}_2]_{\mathscr{B}} = P^{-1}\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\ 2\\ 1\end{bmatrix}, \qquad [\boldsymbol{e}_3]_{\mathscr{B}} = P^{-1}\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

(3) 表現行列の定義により,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}A = A,\\ \begin{bmatrix}f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix}B = PB.\end{aligned}$$

ここで, $f(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ と表せば,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}M\boldsymbol{e}_1 & M\boldsymbol{e}_2 & M\boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = M,\\ \begin{bmatrix}f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}M\boldsymbol{u}_1 & M\boldsymbol{u}_2 & M\boldsymbol{u}_3\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix} = MP\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}A = M &= \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -4 & 6 & 2\\ 4 & -4 & 0\end{bmatrix},\\ B = P^{-1}MP &= P^{-1}\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -4 & 6 & 2\\ 4 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 2\\ -4 & 0 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$