

数学演習第二 (演習 第 12 回) 【解答例】

微積：重積分 [2] (重積分の変数変換) 2025 年 1 月 15 日

【演習問題】

1 (1) $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. よって,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{(ad-bc)^2} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{ad-bc}}.$$

実は, 一般に $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}$ が成り立つので, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}$ と計算してもよい.

(2) $y = uv, x = u - y = u(1 - v)$ であるから, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u + uv = \boxed{u}$.

(3) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos^n \theta & -nar \cos^{n-1} \theta \sin \theta \\ b \sin^n \theta & nbr \sin^{n-1} \theta \cos \theta \end{vmatrix} = a \cos^{n-1} \theta \cdot b \sin^{n-1} \theta \cdot nr \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \boxed{nab r (\cos \theta \sin \theta)^{n-1}}.$

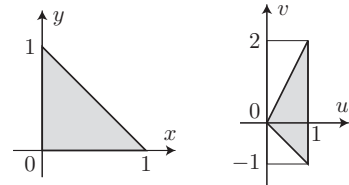
(4) $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} a \sin \theta \cos \varphi & ar \cos \theta \cos \varphi & -ar \sin \theta \sin \varphi \\ b \sin \theta \sin \varphi & br \cos \theta \sin \varphi & br \sin \theta \cos \varphi \\ c \cos \theta & -cr \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = abc r^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix}$
 $= abc r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) = \boxed{abc r^2 \sin \theta}.$

2 (1) $u = x + y, v = x - y$ とおけば, $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ であり, D は $0 \leq u \leq 1, |v| \leq 1$ に対応する. よって,

$$I_1 = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1}} \frac{u+v}{2} e^u \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{4} \int_0^1 du \int_{-1}^1 (u+v) e^u dv = \frac{1}{2} \int_0^1 u e^u du$$

$$= \frac{1}{2} [(u-1)e^u]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(2) $u = x + y, v = 2x - y$ とおけば, $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{2u-v}{3},$
 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$ このとき D は $0 \leq u \leq 1,$
 $-u \leq v \leq 2u$ に対応する (三角形の頂点の対応に注目) から,



$$I_2 = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ -u \leq v \leq 2u}} \frac{v}{1+u^3} \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_0^1 du \int_{-u}^{2u} \frac{v}{1+u^3} dv$$

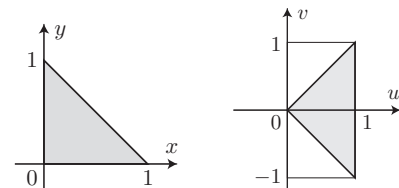
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \frac{v^2}{1+u^3} \right]_{v=-u}^{v=2u} du = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{3u^2}{1+u^3} du = \left[\frac{1}{6} \log(1+u^3) \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6} \log 2}.$$

(3) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ (極座標変換) とおけば,

$$I_3 = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2}} r^2 (\cos \theta + \sin \theta)^2 \cdot r dr d\theta = \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos \theta \sin \theta) d\theta \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\theta + \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \boxed{\frac{\pi+2}{8}}.$$

(4) $u = x + y, v = x - y$ とおけば, $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2},$
 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$ このとき D は $0 \leq u \leq 1,$
 $-u \leq v \leq u$ に対応する (三角形の頂点の対応に注目) から,



$$I_4 = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ -u \leq v \leq u}} \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{2} \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{4} \int_0^1 du \underbrace{\int_{-u}^u \sqrt{u^2 - v^2} dv}_{\text{半径 } u \text{ の半円の面積}} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\pi}{2} u^2 du = \boxed{\frac{\pi}{24}}.$$

【別法】累次積分でも計算できる.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{xy} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 x^{1/2} (1-x)^{3/2} dx \stackrel{x=\sin^2 t}{=} \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^3 t \cdot 2 \sin t \cos t dt \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t dt = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t - \cos^6 t) dt = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$

あるいは, $x = r \cos^2 \theta$, $y = r \sin^2 \theta$ において, $I_4 = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2}} r \cos \theta \sin \theta \cdot 2r \cos \theta \sin \theta d\theta$ と計算してもよい.

(5) $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ とおけば, $x = u^2$, $y = v^2$, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 4uv$ で, D は $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u + v \leq 1$ に対応する.

$$\begin{aligned} I_5 &= \iint_{\substack{u \geq 0, v \geq 0 \\ u+v \leq 1}} u^2 v^2 \cdot 4uv du dv = 4 \int_0^1 du \int_0^{1-u} u^3 v^3 dv = \int_0^1 u^3 (1-u)^4 du \quad \left(= B(4, 5) = \frac{3!4!}{8!} \right) \\ &= \left[-\frac{1}{5} u^3 (1-u)^5 \right]_0^1 + \frac{3}{5} \int_0^1 u^2 (1-u)^5 du = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \int_0^1 u (1-u)^6 du = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \int_0^1 (1-u)^7 du = \boxed{\frac{1}{280}}. \end{aligned}$$

【別法】 $x = r \cos^4 \theta$, $y = r \sin^4 \theta$ とおけば, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = 4r(\cos \theta \sin \theta)^3$ であるから,

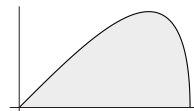
$$\begin{aligned} I_5 &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2}} (r \cos^4 \theta)(r \sin^4 \theta) \cdot 4r(\cos \theta \sin \theta)^3 dr d\theta = 4 \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right)^7 d\theta \right) \\ &= \frac{1}{128} \int_0^{\pi} \sin^7 \varphi \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{128} \int_0^{\pi/2} \sin^7 \varphi d\varphi = \frac{1}{128} \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1}{280}. \end{aligned}$$

(6) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (極座標変換) とおけば, D は $0 \leq r \leq \cos \theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ に対応するから,

$$\begin{aligned} I_6 &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq \cos \theta \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2}} \sqrt{r \cos \theta} r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos \theta} \sqrt{\cos \theta} r^{3/2} dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} \left[\frac{2}{5} r^{5/2} \right]_{r=0}^{r=\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{2}{5} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{4}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{8}{15}}. \end{aligned}$$

(7) 与えられた曲線を $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) と表せば,

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^1 dx \int_0^{f(x)} x dy = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\pi/2} xy \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\pi/2} t \cos^2 t \sin t dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} t (\cos^3 t)' dt = \frac{1}{3} \left(-[t \cos^3 t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt \right) = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}. \end{aligned}$$



【別法】 $x = \sin t$, $y = st \cos t$ ($0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq \pi/2$) で変数変換する. $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = -t \cos^2 t$ より,

$$I_7 = \iint_{\substack{0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq t \leq \pi/2}} \sin t \cdot t \cos^2 t ds dt = \int_0^{\pi/2} t \cos^2 t \sin t dt = \frac{2}{9}.$$

3 (1) $u = x + y$, $v = y + z$, $w = z + x$ とおくと, $u + v + w = 2(x + y + z)$ より, $x = \frac{u + v + w}{2} - v = \frac{u - v + w}{2}$,

$y = \frac{u + v - w}{2}$, $z = \frac{-u + v + w}{2}$ となり, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$. よって,

$$\begin{aligned} J_1 &= \iiint_V (xy + yz + zx) dx dy dz \quad (E : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1) \\ &= \frac{1}{8} \iiint_E \{2(uv + vw + wu) - (u^2 + v^2 + w^2)\} du dv dw = \frac{1}{8} \left(6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{3} \right) du = \boxed{\frac{1}{16}}. \end{aligned}$$

(2) $x \leq z \leq 2x$ となる z が存在するとき $x \geq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} J_2 &= \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0}} x dy \int_x^{2x} xz dz = \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0}} \left[\frac{1}{2} x z^2 \right]_{z=x}^{z=2x} dx dy = \frac{3}{2} \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0}} x^3 dx dy \\ &\stackrel{\text{極座標変換}}{=} \frac{3}{2} \iint_{\substack{0 \leq r \leq a \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2}} r^3 \cos^3 \theta \cdot r dr d\theta = \frac{3}{2} \left(\int_0^a r^4 dr \right) \left(2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a^5}{5} \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2a^5}{5}}. \end{aligned}$$

【別法】極座標変換を用いずに $\iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0}} x^3 dx dy = \int_{-a}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} x^3 dx$ と累次積分で計算してもよい.

(3) 空間の極座標変換 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ を用いて,

$$\begin{aligned} J_3 &= \iiint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \sqrt{1-r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \left(\int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \\ &= 4\pi \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \cdot \cos t dt \quad (r = \sin t) \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}. \end{aligned}$$

(4) 空間の極座標変換 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ を用いて,

$$\begin{aligned} J_4 &= \iiint_{\substack{a \leq r \leq b \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \frac{1}{r^p} \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \left(\int_a^b r^{2-p} dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \\ &= \begin{cases} \frac{4\pi}{p-3} (a^{3-p} - b^{3-p}) & (p \neq 3 \text{ のとき}) \\ 4\pi \log \frac{b}{a} & (p = 3 \text{ のとき}) \end{cases}. \end{aligned}$$

- 4 (1) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ を極座標 (r, θ) で表すと $(r^2)^2 = (r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 = r^2 \cos 2\theta$, 整理して $r = \sqrt{\cos 2\theta}$.
よって, 曲線が囲む部分は $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta}$ (θ は $\cos 2\theta \geq 0$ となる範囲) と表される (微積教科書 p.121 の下に図がある). 曲線が x 軸, y 軸に関して対称であることは方程式から明らかであるから, 第 1 象限にある部分 $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi/4$) の面積を 4 倍すれば求める面積 (S_1 とする) になる.

$$S_1 = 4 \iint_{\substack{0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta} \\ 0 \leq \theta \leq \pi/4}} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (\sqrt{\cos 2\theta})^2 d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \boxed{1}.$$

- (2) この曲線も x 軸および y 軸に関して対称であり, 第 1 象限においてこの曲線と座標軸の囲む部分の面積を 4 倍すれば求める面積 (S_2 とする) になる. $x = ar \cos^3 \theta$, $y = br \sin^3 \theta$ とおけば,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos^3 \theta & -3ar \cos^2 \theta \sin \theta \\ b \sin^3 \theta & 3br \sin^2 \theta \cos \theta \end{vmatrix} = 3ab r (\cos \theta \sin \theta)^2 = \frac{3ab}{4} r \sin^2 2\theta$$

であるから, 求める面積は

$$\begin{aligned} S_2 &= \iint_{(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} \leq 1} dx dy = 4 \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2}} \frac{3ab}{4} r \sin^2 2\theta dr d\theta \\ &= 3ab \left(\int_0^1 r dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta \right) = 3ab \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \boxed{\frac{3}{8} \pi ab}. \end{aligned}$$

- (3) 考えている部分は $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq x$ と表される. 円板 $x^2 + y^2 \leq x$ は円板 $x^2 + y^2 \leq 1$ に含まれるから, 求める体積 V_3 は

$$V_3 = \iint_{x^2 + y^2 \leq x} dx dy \int_0^{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq x} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$$

ここで, $x^2 + y^2 \leq x$ は極座標 (r, θ) を用いて $0 \leq r \leq \cos \theta$ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) と表されるから,

$$\begin{aligned} V_3 &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq \cos \theta \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2}} (1 - r) r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos \theta} (r - r^2) dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 \theta - \frac{2}{3} \cos^3 \theta \right) d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{4}{9}}. \end{aligned}$$

- (4) 放物面と平面で囲まれた部分 $E_1: 2x \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ の体積を V_{41} とし, E_1 のうちで $x \geq 0$ となる部分 $E_2: 0 \leq 2x \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ の体積を V_{42} とする. E_1 においては $2x \leq 1 - x^2 - y^2$ であるから,

$$\begin{aligned} V_{41} &= \iiint_{2x \leq z \leq 1 - x^2 - y^2} dx dy dz = \iint_{2x \leq 1 - x^2 - y^2} dx dy \int_{2x}^{1 - x^2 - y^2} dz \\ &= \iint_{(x+1)^2 + y^2 \leq 2} \{2 - (x+1)^2 - y^2\} dx dy. \end{aligned}$$

ここで、 $(-1, 0)$ を中心とする極座標 (r, θ) をとれば、 $x + 1 = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ であるから、

$$V_{41} = \iint_{\substack{0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (2 - r^2) r \, dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3) \, dr = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \boxed{2\pi}.$$

次に、 E_2 を極座標で表す。条件 $x \geq 0$ は $x + 1 = r \cos \theta \geq 1$, すなわち $\frac{1}{\cos \theta} \leq r (\leq \sqrt{2})$ と表され、 θ の範囲は $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ に限定される。よって、

$$\begin{aligned} V_{42} &= \iint_{\substack{\frac{1}{\cos \theta} \leq r \leq \sqrt{2} \\ -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4}} (2 - r^2) r \, dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^{\sqrt{2}} (2r - r^3) \, dr = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=\frac{1}{\cos \theta}}^{r=\sqrt{2}} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{4 \cos^4 \theta} \right) d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \{-4 + (1 + \tan^2 \theta)\} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[-3 \tan \theta + \frac{1}{3} \tan^3 \theta \right]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

(5) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$ を空間の極座標 (r, θ, φ) を用いて表すと、 $(r^2)^2 = r \cos \theta$ より $r = (\cos \theta)^{1/3}$ 。このとき、 $\cos \theta \geq 0$ であるから $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 。また、 φ は制限を受けないので $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 。よって、求める体積 V_5 は

$$\begin{aligned} V_5 &= \iiint_{(x^2+y^2+z^2)^2 \leq z} dx dy dz = \iiint_{\substack{0 \leq r \leq (\cos \theta)^{1/3} \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^{(\cos \theta)^{1/3}} r^2 \sin \theta \, dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{(\cos \theta)^{1/3}} r^2 \sin \theta \, dr = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{3} \left[\sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

【レポート課題】(オンライン提出)

1 (1) **4** (1) を参照するとよいが、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲で考えると、 $-|x| \leq y \leq |x|$ より、 $-\cos \theta \leq \sin \theta \leq \cos \theta$ なので、 $|\theta| \leq \pi/4$ または $3\pi/4 \leq |\theta| \leq \pi$ で、 $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta}$ であるから、
 $\Phi^{-1}(D) = \{ (r, \theta) \mid |\theta| \leq \pi/4, 3\pi/4 \leq |\theta| \leq \pi, 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta} \}.$

(2) (1) と $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ より、

$$I = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(r^2 + 1)^2} \, dr = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[-\frac{1}{2(1 + r^2)} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \right) d\theta = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}.$$

2 (1) D は 1 次変換 $u = x - y$, $v = x + y$ で原点 $(0, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円板 $u^2 + v^2 \leq 2$ に写される。

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1 \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \bigg/ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{ より,}$$

$$J_1 = \iint_{\substack{|u| \leq \sqrt{2} \\ |v| \leq \sqrt{2-u^2}}} \sqrt{2-u^2} \cdot \frac{1}{2} \, du dv = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} du \int_{-\sqrt{2-u^2}}^{\sqrt{2-u^2}} \sqrt{2-u^2} \, dv = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (2-u^2) \, du = 2 \left[2u - \frac{u^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{3}}.$$

注: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と変換しても、 θ に関する積分が実行できない。

(2) V は極座標で $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ と表される。 $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ より、

$$\begin{aligned} J_2 &= \iiint_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi = \int_1^2 r^4 \, dr \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \\ &= \int_1^2 r^4 \, dr \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^2 \cdot \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \cdot \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{31}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \boxed{\frac{124}{15} \pi}. \end{aligned}$$

注: 回転対称性により、 $\iiint_V z^2 dx dy dz$ や $\frac{1}{3} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ を計算してもよい。(計算が多少簡単になる.)