

数学演習第二（演習第 13 回）【解答例】

線形：行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化

2025 年 1 月 22 日

【授業中の演習問題の解答例】

1

(a) について

$$(1) F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1). \quad A \text{ の固有値は } \lambda = -2, 1.$$

$$(2) \underline{\lambda = -2 \text{ に対して: }} -2E - A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } (-2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (} s \text{ は任意定数). よって, } V_{-2} \text{ の基底は } \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \quad \underline{\lambda = 1 \text{ に対して: }} E - A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } (E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (} s \text{ は任意定数). よって, } V_1 \text{ の基底は } \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

$$(3) P = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ とおけば, } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) について

$$(1) F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & -4 \\ -2 & \lambda-6 & 4 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda-6 & 4 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3. \quad A \text{ の固有値は } \lambda = 2.$$

$$(2) \underline{\lambda = 2 \text{ に対して: }} 2E - A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } (2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意定数). よって, } V_2 \text{ の基底は } \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

$$(3) \dim V_2 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3 \text{ であるから, (b) の } A \text{ は対角化可能でない.}$$

(c) について

$$(1) F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ \lambda-1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & -3 \\ 0 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2). \quad A \text{ の固有値は } \lambda = 1, 2.$$

$$(2) \underline{\lambda = 1 \text{ に対して: }} E - A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } (E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意定数). よって, } V_1 \text{ の基底は } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \quad \underline{\lambda = 2 \text{ に対して: }} 2E - A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } (2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (} s \text{ は任意定数). よって, } V_2 \text{ の基底は } \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

$$(3) P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ とおけば, 命題 13.6 (ii) から, 基本解は 1 次独立なので, } P \text{ は正則で, } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2

$$[P, E_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ より, } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ なので,}$$

$$A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 1 - 2^n & 2^n & -1 + 2^n \\ -2 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} & 3 - 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

注: $n=0$ のとき, $P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{bmatrix} P^{-1} = PP^{-1} = E$ なので, $A^0 = E$ と定義すれば, 上の計算結果は $n=0$ のときも成立する. 得られた結果に $n=0, 1$ を代入して, それぞれ E, A に一致することをチェックすると検算になる.

【レポート課題の解答例】

- 3 (1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ -1 & \lambda-1 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 4 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$
 $= (\lambda-2)^2(\lambda-1)$. よって, A の固有値は $\lambda=2, 1$.
- (2) $2E - A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数). よって V_2 の基底は, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $E - A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって V_1 の基底は, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
- (3) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと, $AP = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より, $A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$.
- ここで, $[P, E] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ より $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ だから,
- $$A^n = P \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & -2^{n+1} + 2 & -2^{n+2} + 4 \\ 2^n - 1 & 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 1 & -2^n + 2 \end{bmatrix}.$$

【それ以外の自習用問題の解答例】

- 4 (a) について
- (1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-8 & 9 \\ -6 & \lambda+7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. A の固有値は $\lambda = -1, 2$.
- (2) $\lambda = -1$ に対して: $-E - A = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(-E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数).
 よって, V_{-1} の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 2$ に対して: $2E - A = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.
- (3) $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
- (b) について
- (1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & -5 \\ -1 & \lambda-2 & -3 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$.
- (2) $\lambda = 1$ に対して: $E - A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 2$ に対して: $2E - A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 3$ に対して: $3E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(3E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -1 \\ 4 & \lambda-5 & -2 \\ -4 & 4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3$. A の固有値は $\lambda = 1$.

(2) $\lambda = 1$ に対して: $E - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $\dim V_1 = 2 < 3$ であるから, (c) の A は対角化可能でない.

5 $\lambda = 0$ のとき, 線形教科書の定理 11.3 から, $|BA| = |AB| = 0$ なので, 0 も BA の固有値である. $\lambda \neq 0$ のとき, AB の固有値 λ に対する固有ベクトルの 1 つを $\mathbf{x}$ とすると, $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ をみताすが, $\lambda \neq 0$ より, $\lambda\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のため, $AB\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ である. 特に, $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ で, $BA(B\mathbf{x}) = B(AB\mathbf{x}) = B(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(B\mathbf{x})$ が成り立つ. $\lambda \neq 0$ のときも, λ は BA の固有値である.

【参考】一般に, 同じサイズの正方行列 A, B に対して, 等式 $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が成り立つ. これを示しておこう.

《方法 1》 A, B を n 次正方行列とすると,

$$\begin{bmatrix} E_n & -A \\ O & \lambda E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda E_n - AB & O \\ \lambda B & \lambda E_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_n & O \\ -B & \lambda E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda E_n & A \\ O & \lambda E_n - BA \end{bmatrix}.$$

ここで, $\begin{vmatrix} E_n & -A \\ O & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & O \\ -B & \lambda E_n \end{vmatrix} = \lambda^n$ であるから, 上の 2 式について, それぞれ両辺の行列式をとることにより,

$$\lambda^n \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = \lambda^n |\lambda E_n - AB| = \lambda^n |\lambda E_n - BA|.$$

を得る. よって, λ の多項式 (整式) として, $|\lambda E_n - AB| = |\lambda E_n - BA|$, すなわち $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が成り立つ.

《方法 2》 A が正則のとき, $A^{-1}(\lambda E - AB) = \lambda A^{-1} - B = (\lambda E - BA)A^{-1}$ より, $|\lambda E - AB| = |A||\lambda A^{-1} - B| = |\lambda E - BA|$. A が正則でないとき, 正数 ε_1 を十分小さくとれば, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ に対して $A_\varepsilon := A + \varepsilon E$ は正則となる (A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすれば, A_ε の固有値は $\lambda_1 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$ となることに注意). このとき, $|\lambda E - A_\varepsilon B| = |\lambda E - BA_\varepsilon|$ が成り立つので, $\varepsilon \rightarrow +0$ とすることにより, $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$ を得る (n 次正方行列 M の行列式 $|M|$ は M の各成分を変数とする n^2 変数多項式, 従って各成分に関して連続であることに注意). よって, $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が示された.

《方法 3》 A の余因子行列を $\tilde{A}$ とすれば, $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$ より, $\tilde{A}(\lambda E - AB) = \lambda\tilde{A} - |A|B = (\lambda E - BA)\tilde{A}$. これより $|\tilde{A}||\lambda E - AB| = |\lambda E - BA||\tilde{A}|$. ここで, 両辺を A の各成分を変数とする n^2 変数多項式と見なして, 0 でない多項式 $|\tilde{A}|$ で割ることにより $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$, すなわち $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ を得る.

《方法 4》 $|B||\lambda E - AB| = |\lambda B - BAB| = |\lambda E - BA||B|$. ここで, 上と同様に, この等式を B の成分を変数とする多項式に対する等式と見なして, 両辺を 0 でない多項式 $|B|$ で割ることにより $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$, すなわち $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ を得る.

6 (1) $(A\mathbf{p}_1, \dots, A\mathbf{p}_n) = (f(\mathbf{p}_1), \dots, f(\mathbf{p}_n)) = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)D = (\mu_1\mathbf{p}_1, \dots, \mu_n\mathbf{p}_n)$ (2 番目の等号で表現行列の定義を用いた) より, $A\mathbf{p}_k = \mu_k\mathbf{p}_k$ ($1 \leq k \leq n$). $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{0}$ であるから, μ_k は A の固有値であり, $\mathbf{p}_k$ は μ_k に対する固有ベクトルである.

- (2) (1) の結果から, $AP = A[\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \cdots A\mathbf{p}_n] = [\mu_1\mathbf{p}_1 \cdots \mu_n\mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]D = PD$.
 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ が 1 次独立なので, $P = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]$ は正則となる. よって, $AP = PD$ から $P^{-1}AP = D$ が従う.
- (3) $A = PDP^{-1}$ と書けるから, $F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = |P(\lambda E - D)P^{-1}| = |P| \begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda - \mu_n \end{vmatrix} |P^{-1}| = (\lambda - \mu_1) \cdots (\lambda - \mu_n)$. ここで, $|P||P^{-1}| = |PP^{-1}| = |E_n| = 1$ を用いた.
- (4) $A = PDP^{-1}$ より $A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} \Leftrightarrow (\mu E - D)P^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mu - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu - \mu_n \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であるから, μ は $\mu_1, \dots, \mu_n$ のいずれかと一致する. $\mu_k = \mu$ となる k を $k_1, \dots, k_m$ (m が固有値 μ の代数的重複度) とすれば, $\mathbf{x} \in V_\mu \Leftrightarrow P^{-1}\mathbf{x} \in \langle \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_m} \rangle \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \langle \mathbf{p}_{k_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_m} \rangle$. よって, $V_\mu = \langle \mathbf{p}_{k_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_m} \rangle$ となり, $\dim V_\mu = m$ が示された.

7

- (1) $P^{-1}AP = C$, $P^{-1}BP = D$ とおくと, C, D は対角行列なので, $CD = DC$ が成り立つから
 $AB = (PCP^{-1})(PDP^{-1}) = P(CD)P^{-1} = P(DC)P^{-1} = (PDP^{-1})(PCP^{-1}) = BA$.

- (2) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を A の固有値とし, $\mathbf{0} \neq \mathbf{p}_k \in V_{\lambda_k}$ ($k = 1, \dots, n$) とすると

$$A(B\mathbf{p}_k) = BA\mathbf{p}_k = B(\lambda_k\mathbf{p}_k) = \lambda_k(B\mathbf{p}_k)$$

より, $B\mathbf{p}_k \in V_{\lambda_k}$ を得る. また, 仮定から, $\dim V_{\lambda_k} = 1$ なので, $B\mathbf{p}_k = \mu_k\mathbf{p}_k$ となる複素数 μ_k が存在する.

よって, $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ は 1 次独立であるから, $P := [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]$ は正則で, $C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_n \end{bmatrix}$

とおくと, [6] (2) と同様に $AP = PC$, $BP = PD$ が成り立つので, $P^{-1}AP = C$, $P^{-1}BP = D$ をみたとす.

8

- (1) $p = 2\alpha, q = -\alpha^2$ に注意する. $f(\mathbf{c}_1) = q\mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{c}_2) = \mathbf{c}_1 + p\mathbf{c}_2$, $F_A(\alpha) = 0$ および $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ の 1 次独立性から,
 $f(\mathbf{c}_2) = (p - \alpha)\mathbf{c}_2 + (\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) = \alpha\mathbf{c}_2 + (\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)$, $f(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) = \alpha\mathbf{c}_1 + (p\alpha + q)\mathbf{c}_2 = \alpha(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)$.

- (2) 簡単のため, $T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ とおくと, $T^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 2\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$ である. ここで, $n \geq 2$ に対して, $T^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix}$ を n に関する帰納法で示す. そこで, n での成立を帰納法の仮定とすると

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} & 0 \\ (n+1)\alpha^n & \alpha^{n+1} \end{bmatrix}.$$

- (3) (1) と (2) の結果より, $n \geq 1$ に対して

$$(f^n(\mathbf{c}_2), f^n(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)) = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)T^n = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix}$$

が成り立つ. 特に, $\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2$ の第 n 項 $(\mathbf{c}_2)_n, (\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)_n$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}_2)_n &= (f^{n-1}(\mathbf{c}_2))_1 = \alpha^{n-1}(\mathbf{c}_2)_1 + (n-1)\alpha^{n-2}(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)_1 = (n-1)\alpha^{n-2}, \\ (\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)_n &= (f^{n-1}(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2))_1 = \alpha^{n-1}(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)_1 = \alpha^{n-1} \end{aligned}$$

で表される. また, 任意の $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in W$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{c}_1 + a_2\mathbf{c}_2 = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} -\alpha a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書ける. よって, $n \geq 1$ に対して, $\alpha = \frac{p}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned} a_n &= (a_2 - \alpha a_1)(n-1)\alpha^{n-2} + a_1\alpha^{n-1} = (2-n)a_1\alpha^{n-1} + (n-1)a_2\alpha^{n-2} \\ &= \left\{ \left(a_2 - \frac{p}{2}a_1 \right) n + (pa_1 - a_2) \right\} \left(\frac{p}{2} \right)^{n-2} \end{aligned}$$

が得られる.