数学演習第二・中間統一試験【解説】

2024 年 11 月 27 日実施 ・ 試験時間 90 分

$\boxed{1}$ (1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log(1+x)}{x^2}\,dx$ の値を求めよ.

【答】 部分積分法を用いて,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\log(1+x)}{x^2}\,dx &= \Big[-\frac{\log(1+x)}{x}\Big]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = \log 2 + \int_1^\infty \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx \\ &= \log 2 + \Big[\log\frac{x}{x+1}\Big]_1^\infty = \log 2 + \log 1 - \log\frac{1}{2} = \boxed{2\log 2}.\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0))$ を用いて $g(x,y) = f(x,y^2)$ $((x,y) \neq (0,0))$ により定まる関数 $g(x,y)$ について考える.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ が存在するなら値を求め, 存在しないなら「存在しない」と記せ.

【答】 $f(x,y)$ を極座標 (r,θ) を用いて表せば,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r^2} = \frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

よって, 例えば $\theta \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ のとき, 半放物線 $P_\theta := \{(r\cos\theta, \sqrt{r\sin\theta}\,) \mid r > 0\}$ (すなわち $y^2 = (\tan\theta)x$ $(y>0)$) の上で $g(x,y) = f(x,y^2)$ は一定値 $\frac{1}{2}\sin 2\theta$ をとる. これより,

$$\lim_{\substack{(x,y)\in P_\theta \\ (x,y)\to(0,0)}} g(x,y) = \frac{1}{2}\sin 2\theta \quad (\theta \text{ によって変化する})$$

となり, 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ は $\boxed{\text{存在しない}}$.

［**別法**］ 関数 $g(x,y)$ は半直線 $y=0$ $(x>0)$ 上で $g(x,0)=0$, 半放物線 $y^2 = x$ $(y>0)$ で $g(y^2,y) = f(y^2,y^2) = \frac{1}{2}$ であるから, $(0,0)$ のどんなに近くにも $g(x,y)$ が 0 となる点と $\frac{1}{2}$ になる点の両方が必ず存在する. よって, 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ は $\boxed{\text{存在しない}}$.

(3) 偏導関数 $g_y(x,y)$ を $\dfrac{\boxed{}}{(x^2+y^4)^2}$ の形に表すとき枠内に入るべき式を求めよ.

【答】 $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ より,

$$g_y(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - xy^2\cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{\boxed{2xy(x^2-y^4)}}{(x^2+y^4)^2}.$$

(4) 2次偏導関数 $g_{xx}(x,y)$ を $\dfrac{\boxed{}}{(x^2+y^4)^3}$ の形に表すとき枠内に入るべき式を求めよ.

【答】 $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ より,

$$g_x(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^4) - xy^2\cdot 2x}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y^2(-x^2+y^4)}{(x^2+y^4)^2},$$

$$\begin{aligned}g_{xx}(x,y) &= \frac{-2xy^2(x^2+y^4)^2 - y^2(-x^2+y^4)\cdot 4x(x^2+y^4)}{(x^2+y^4)^4} \quad (x^2+y^4 \text{ で約分}) \\ &= \frac{2xy^2\{-(x^2+y^4) - 2(-x^2+y^4)\}}{(x^2+y^4)^3} = \frac{\boxed{2xy^2(x^2-3y^4)}}{(x^2+y^4)^3}.\end{aligned}$$

［**別法**］ $g_x(x,y)$ から $g_{xx}(x,y)$ を計算する際に，上では商の微分公式を 2 回繰り返して用いたが，$g_x(x,y)=\dfrac{-y^2}{x^2+y^4}+\dfrac{2y^6}{(x^2+y^4)^2}$ と変形してから，

$$g_{xx}(x,y)=\frac{(-y^2)(-2x)}{(x^2+y^4)^2}+\frac{2y^6(-2\cdot 2x)}{(x^2+y^4)^3}=\frac{2xy^2(x^2+y^4)-8xy^6}{(x^2+y^4)^3}=\frac{\boxed{2xy^2(x^2-3y^4)}}{(x^2+y^4)^3}.$$

と計算すれば約分操作が現れない．$g_x(x,y)=y^2(-x^2+y^4)\cdot\dfrac{1}{(x^2+y^4)^2}$ に積の微分公式を適用しても約分操作を経ずに計算できる．

3 関数 $f(r,\theta)=r^3\cos 2\theta$ と変換 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$ について考える．

(5) 合成して得られる関数を $g(x,y)$ とする．$g(x,y)$ の $(x,y)=(\sqrt{3},-1)$ における x に関する偏微分係数 $g_x(\sqrt{3},-1)$ を求めよ．

【答】 まず，$f(r,\theta)=r^3\cos 2\theta$ の偏導関数は

$$f_r(r,\theta)=3r^2\cos 2\theta,\quad f_\theta(r,\theta)=-2r^3\sin 2\theta.$$

また，$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ より，

$$r_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r},\quad \theta_x=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-y}{r^2}.$$

よって，合成関数の微分公式を用いて，

$$g_x=f_r\cdot r_x+f_\theta\cdot\theta_x=3r^2\cos 2\theta\cdot\frac{x}{r}-2r^3\sin 2\theta\cdot\frac{-y}{r^2}=3r\cos 2\theta\cdot x+2r\sin 2\theta\cdot y.$$

ここで，$(x,y)=(\sqrt{3},-1)$ のとき $(r,\theta)=\left(2,-\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，

$$g_x(\sqrt{3},-1)=6\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{3}+4\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot(-1)=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\boxed{5\sqrt{3}}.$$

［**別法**］$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$ は極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ の逆変換であるから，$f(r,\theta)=r\{(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2\}$ に注意して，

$$g(x,y)=(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2},$$
$$g_x(x,y)=2x\cdot\sqrt{x^2+y^2}+(x^2-y^2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x(3x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

よって，$g_x(\sqrt{3},-1)=\dfrac{\sqrt{3}\,(9+1)}{2}=\boxed{5\sqrt{3}}$.

(6) 変換 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$ のヤコビアン $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ を求めよ．

【答】 $$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

4 関数 $f(x,y)=e^{2x+y}\sqrt{1+2y}$ について考える．

(7) 点 $(0,0,1)$ における曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を $z=ax+by+c$ $(a,b,c$ は定数$)$ の形で表せ．

【答】 (8) のことも考慮して，$f(x,y)=e^{2x+y}\sqrt{1+2y}$ の 2 次までのマクローリン展開を求める．

$$e^X=1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2),\quad \sqrt{1+X}=1+\frac{X}{2}-\frac{X^2}{8}+o(X^2)\quad (X\to 0)$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{2x+y}\sqrt{1+2y} \\
&= \left\{1+(2x+y)+\frac{(2x+y)^2}{2}+o(x^2+y^2)\right\}\left(1+y-\frac{y^2}{2}+o(x^2+y^2)\right) \\
&= 1+\{y+(2x+y)\}+\left\{-\frac{y^2}{2}+(2x+y)y+\frac{(2x+y)^2}{2}\right\}+o(x^2+y^2) \\
&= 1+(2x+2y)+(2x^2+4xy+y^2)+o(x^2+y^2).
\end{aligned}
$$

よって, $z=f(x,y)$ の点 $(0,0,1)$ における接平面の方程式は

$$z=1+2x+2y, \quad \text{すなわち} \quad \boxed{z=2x+2y+1}.$$

［**別法**］ $f(x,y)=e^{2x+y}\sqrt{1+2y}$ の偏導関数は

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2e^{2x+y}\sqrt{1+2y}, \\
f_y(x,y) &= e^{2x+y}\sqrt{1+2y}+e^{2x+y}\frac{1}{\sqrt{1+2y}}=\frac{2e^{2x+y}(1+y)}{\sqrt{1+2y}}.
\end{aligned}
$$

よって, $z=f(x,y)$ の $(0,0,1)$ における接平面の方程式は

$$z-1=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y=2x+2y, \quad \text{すなわち} \quad \boxed{z=2x+2y+1}.$$

(8) $f(x,y)$ のマクローリン展開の 2 次の項, すなわち

$$f(x,y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+\boxed{a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2}+\cdots$$

の枠で囲った部分を具体的に書け.

【答】 前問の計算を見て, $f(x,y)$ のマクローリン展開の 2 次の項は $\boxed{2x^2+4xy+y^2}$.

［**別法**］ $f(x,y)=e^{2x+y}\sqrt{1+2y}$ の 2 次偏導関数は

$$
\begin{aligned}
& f_{xx}(x,y)=4e^{2x+y}\sqrt{1+2y}, \quad f_{xy}(x,y)=\frac{4e^{2x+y}(1+y)}{\sqrt{1+2y}}, \\
& f_{yy}(x,y)=e^{2x+y}\sqrt{1+2y}+2e^{2x+y}\frac{1}{\sqrt{1+2y}}-e^{2x+y}\frac{1}{(1+2y)^{3/2}}=\frac{2e^{2x+y}(1+4y+2y^2)}{(1+2y)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

これを用いて, $f(x,y)$ のマクローリン展開の 2 次の項は

$$\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right\}=\frac{1}{2}(4x^2+8xy+2y^2)=\boxed{2x^2+4xy+y^2}.$$

$\boxed{5}$ 関数 $f(x,y)=xy(x-y+3)$ に対する極値問題を考える.

(9) $f(x,y)$ の停留点 (すなわち $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点) をすべて求めよ.

【答】 $f_x(x,y)=2xy-y^2+3y=y(2x-y+3)=0$, $f_y(x,y)=x^2-2xy+3x=x(x-2y+3)=0$ の解として停留点が得られる. 第 1 式より $y=0$ または $y=2x+3$.

- $y=0$ を第 2 式に代入すると $x(x+3)=0$ となり, $x=0,-3$.
- $y=2x+3$ を第 2 式に代入すると $-3x(x+1)=0$ となり, $x=0,-1$.

よって, $f(x,y)$ の停留点は $\boxed{(0,0),\ (-3,0),\ (0,3),\ (-1,1)}$.

(10) $f(x,y)$ の極値をすべて求め, 各極値 c に対して「点 (a,b) で極大値 (or 極小値) c をとる」という形で答えよ.

【答】 停留点において $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ および $f_{xx}(x,y)$ の符号を調べること

により, 極値の判定を行う．なお, $D(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$ はそれぞれ

$$H_f(x,y) := \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x-2y+3 \\ 2x-2y+3 & -2x \end{bmatrix} \quad (f \text{ のヘッセ行列})$$

の行列式, $(1,1)$ 成分に他ならない.

- $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ より, $D(0,0) = -9 < 0$. よって, f は $(0,0)$ で極値をとらない.
- $H_f(-3,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ より, $D(-3,0) = -9 < 0$. よって, f は $(-3,0)$ で極値をとらない.
- $H_f(0,3) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ より, $D(0,3) = -9 < 0$. よって, f は $(0,3)$ で極値をとらない.
- $H_f(-1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ より, $D(-1,1) = 3 > 0$, $f_{xx}(-1,1) = 2 > 0$. よって, f は $(-1,1)$ で極小値 $f(-1,1) = -1$ をとる.

以上より, $f(x,y)$ は $\boxed{(-1,1) \text{ で極小値 } -1 \text{ をとる}}$.

6 空間内に4点 $\mathrm{A}(1,1,0)$, $\mathrm{B}(3,-1,1)$, $\mathrm{C}(2,-1,3)$, $\mathrm{D}(3,2,1)$ をとる.

(11) 平面 ABC の方程式を $ax+by+cz=d$ (a,b,c,d は定数) の形で求めよ.

【答】 平面 ABC は点 $\mathrm{A}(1,1,0)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, その方程式は $4(x-1)+5(y-1)+2z=0$, 整理して $\boxed{4x+5y+2z=9}$.

(12) 三角形 ABC の面積を求めよ.

【答】 (三角形 ABC の面積) $= \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{16+25+4} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}$.

(13) 点 D から平面 ABC に下ろした垂線と平面 ABC との交点の座標を求めよ.

【答】 この垂線は点 $\mathrm{D}(3,2,1)$ を通り, $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, 垂線と平面 ABC との交点の座標は $(3+4t, 2+5t, 1+2t)$ とおける．この点は平面 $4x+5y+2z=9$ 上にあるから,

$$4(3+4t)+5(2+5t)+2(1+2t) = 9. \qquad \therefore\ t = \frac{9-24}{45} = -\frac{1}{3}.$$

よって, 求める交点の座標は $\left(3-\dfrac{4}{3},\ 2-\dfrac{5}{3},\ 1-\dfrac{2}{3}\right) = \boxed{\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)}$.

7 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ および $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ によって生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ について考える．このとき, $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は V の1つの基底である.

(14) 次の①から⑥のうち V の基底となるものをすべて挙げよ.

① $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$, ② $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)$, ③ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)$, ④ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)$,
⑤ $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)$, ⑥ $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)$.

【答】 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ を行基本変形することにより，これらのベクトルの間の１次関係を調べる．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

行基本変形により列ベクトルの間の１次関係は変わらないから，最後の行列を見て，V の基底となるのは $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)$, $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)$，すなわち $\boxed{\text{①, ③, ⑤}}$ であることが分かる．

(15) $\boldsymbol{b}_1 \in V$ ならば $\boldsymbol{b}_1$ の $\mathscr{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}}$ を求め，$\boldsymbol{b}_1 \notin V$ ならば「属さず」と記せ．

【答】 上の変形から $\boldsymbol{b}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 \in V$，従って $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ であることが読み取れる．

$\boxed{8}$ 次で与えられる $\mathbb{R}^4$ の２つの部分空間について考える:

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

(16) W_1 を生成するベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が１次従属ならば非自明な１次関係式を求め，１次独立ならば「１次独立」と記せ．

【答】 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ を簡約化すると，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これより $\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ であることが分かる．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次従属で，非自明な１次関係式 $\boxed{3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}}$ をもつ．

(17) W_2 の次元を求めよ．

【答】 まず，W_2 を定義する同次連立１次方程式を解く．係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と簡約化されるので，解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

よって，W_2 は基底 $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ をもつので，次元は $\dim W_2 = \boxed{2}$．

(18) $W_1 \cap W_2$ の基底を１つ求めよ．

【答】 (16) より $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ が W_1 の基底となり, (17) で求めた W_2 の基底を作るベクトルを $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ とすれば $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ が W_2 の基底となる．このとき, 行基本変形により

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の１次関係式は $2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ (とその定数倍) に限られる．よって, $W_1 \cap W_2$ は $2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ で生成され, $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)}$ が $W_1 \cap W_2$ の基底となる．

［**別法**］ 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ は $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2$ の形に書ける．このとき,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + (-d_1)\boldsymbol{b}_1 + (-d_2)\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$$

であるから, 上の基本変形から

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -d_1 \\ -d_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

よって, $W_1 \cap W_2$ は $2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ で生成され, $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)}$ を基底とすることが分かる．

$\boxed{9}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -7 & 5 & k \end{bmatrix}$ の列空間を $C(A)$, 零空間を $N(A)$ とする．

(19) $\dim C(A) = 3$ となるための実数 k の条件を求めよ．

【答】 行基本変形により,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -7 & 5 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -7 & 5 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & k-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+5 \end{bmatrix}.$$

よって, $\dim C(A) = 3$ となるための条件は $k + 5 \neq 0$, すなわち $\boxed{k \neq -5}$ である．

(20) $\dim C(A) = 2$ であるとき, $N(A)$ の基底を１つ求めよ．

【答】 上の行基本変形より $\dim C(A) = 2$ となるのは $k = -5$ のときと分かる．よって, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2s + 2t \\ s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数})$$

となり, $N(A)$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}$ がとれる．