数学演習第二・中間統一試験【問題用紙】

2024 年 11 月 27 日実施 ・ 試験時間 90 分

- 解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと.
- 結果は整理された形で答えること (整理が不十分な場合には不正解となることがある).

1 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log(1+x)}{x^2}\,dx$ の値を求めよ.

2 関数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ を用いて $g(x,y) = f(x,y^2)$ $((x,y)\neq(0,0))$ により定まる関数 $g(x,y)$ について考える.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ が存在するなら値を求め, 存在しないなら「存在しない」と記せ.

(3) 偏導関数 $g_y(x,y)$ を $\dfrac{\boxed{}}{(x^2+y^4)^2}$ の形に表すとき枠内に入るべき式を求めよ.

(4) 2次偏導関数 $g_{xx}(x,y)$ を $\dfrac{\boxed{}}{(x^2+y^4)^3}$ の形に表すとき枠内に入るべき式を求めよ.

3 関数 $f(r,\theta) = r^3\cos 2\theta$ と変換 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$ について考える.

(5) 合成して得られる関数を $g(x,y)$ とする. $g(x,y)$ の $(x,y) = (\sqrt{3},-1)$ における x に関する偏微分係数 $g_x(\sqrt{3},-1)$ を求めよ.

(6) 変換 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$ のヤコビアン $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ を求めよ.

4 関数 $f(x,y) = e^{2x+y}\sqrt{1+2y}$ について考える.

(7) 点 $(0,0,1)$ における曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式を $z = ax+by+c$ (a,b,c は定数) の形で表せ.

(8) $f(x,y)$ のマクローリン展開の 2 次の項, すなわち

$$f(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \boxed{a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2} + \cdots$$

の枠で囲った部分を具体的に書け.

5 関数 $f(x,y) = xy(x-y+3)$ に対する極値問題を考える.

(9) $f(x,y)$ の停留点 (すなわち $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点) をすべて求めよ.

(10) $f(x,y)$ の極値をすべて求め, 各極値 c に対して「点 (a,b) で極大値 (or 極小値) c をとる」という形で答えよ.

6 空間内に４点 A$(1,1,0)$, B$(3,-1,1)$, C$(2,-1,3)$, D$(3,2,1)$ をとる.

(11) 平面 ABC の方程式を $ax+by+cz=d$ (a,b,c,d は定数) の形で求めよ.

(12) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(13) 点 D から平面 ABC に下ろした垂線と平面 ABC との交点の座標を求めよ.

7 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}3\\3\\-2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$ および $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3$ によって生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $V=\langle\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3\rangle$ について考える. このとき, $\mathscr{A}=(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3)$ は V の１つの基底である.

(14) 次の①から⑥のうち V の基底となるものをすべて挙げよ.

① $(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{b}_1)$, ② $(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{b}_2)$, ③ $(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_3,\,\boldsymbol{b}_1)$, ④ $(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_3,\,\boldsymbol{b}_2)$,
⑤ $(\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3,\,\boldsymbol{b}_1)$, ⑥ $(\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3,\,\boldsymbol{b}_2)$.

(15) $\boldsymbol{b}_1\in V$ ならば $\boldsymbol{b}_1$ の $\mathscr{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}}$ を求め, $\boldsymbol{b}_1\notin V$ ならば「属さず」と記せ.

8 次で与えられる $\mathbb{R}^4$ の２つの部分空間について考える:

$$W_1=\left\langle \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix},\,\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\4\\1\\3\end{bmatrix},\,\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\-3\end{bmatrix}\right\rangle,$$

$$W_2=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{array}{l}x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\x_1+3x_2\phantom{{}-x_3}+2x_4=0\end{array}\right\}.$$

(16) W_1 を生成するベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が１次従属ならば非自明な１次関係式を求め, １次独立ならば「１次独立」と記せ.

(17) W_2 の次元を求めよ.

(18) $W_1\cap W_2$ の基底を１つ求めよ.

9 行列 $A=\begin{bmatrix}3&4&2&-2\\2&3&1&-1\\-1&-7&5&k\end{bmatrix}$ の列空間を $C(A)$, 零空間を $N(A)$ とする.

(19) $\dim C(A)=3$ となるための実数 k の条件を求めよ.

(20) $\dim C(A)=2$ であるとき, $N(A)$ の基底を１つ求めよ.