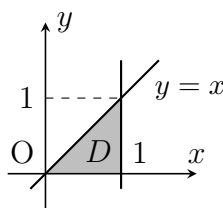


令和6年度 数学演習第二 期末統一試験 【解説】

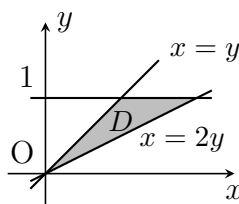
2025年1月29日 実施

1 (1)



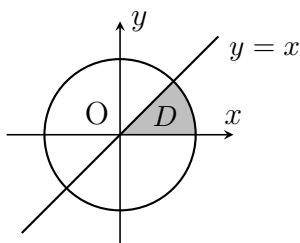
$$\begin{aligned}\iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x (x+y) dy \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 dx = \boxed{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

(2)



$$\begin{aligned}\iint_D e^y dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{2y} e^y dx \\ &= \int_0^1 ye^y dy = [ye^y]_0^1 - \int_0^1 e^y dy = \boxed{1}.\end{aligned}$$

(3)



極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いると,
 D は $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ に対応し,
 $dx dy = r dr d\theta$ だから,

$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 dr \int_0^{\pi/4} r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \left[\frac{1}{4}r^4 \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{1}{16}}.\end{aligned}$$

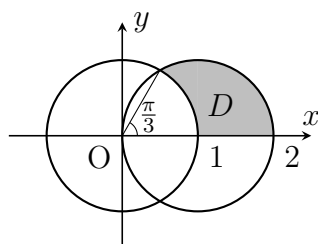
(4) $u = 2x - y$, $v = x - 2y$ と変数変換すると, D は $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq u + 1$ に対応し, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$ より, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}^{-1} = -\frac{1}{3}$ だから,

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dx dy}{1 + (2x - y)^2} &= \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^{u+1} \frac{1}{1 + u^2} dv = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1 + u}{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{3} \left[\tan^{-1} u + \frac{1}{2} \log(1 + u^2) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{12} + \frac{1}{6} \log 2}.\end{aligned}$$

2

(5) $y \geq 0$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ と同値である. また, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$ は $1 \leq r \leq 2 \cos \theta$ と同値であり, これを満たす r が存在するような θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の範囲は, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ である. よって,

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^{\boxed{\frac{\pi}{3}}} d\theta \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2 \cos \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \boxed{r} dr.$$



3 (6) $x = s, y = t/s, z = u/t$ となるから,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & -\frac{u}{t^2} & \frac{1}{t} \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{st}}.$$

また, $x^2yz = su$ より,

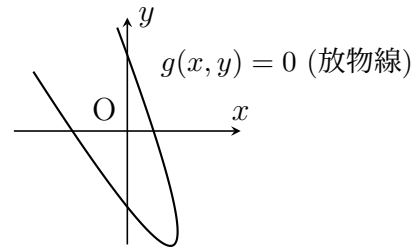
$$I = \iiint_{1 \leq s, t, u \leq 2} su \cdot \frac{1}{st} ds dt du = \int_1^2 ds \int_1^2 \frac{1}{t} dt \int_1^2 u du = [\log t]_1^2 \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_1^2 = \boxed{\frac{3}{2} \log 2}.$$

4 (7) $4x^2 + y^2 + 4xy + 3x - 4 = 0$ ($y = \varphi(x)$)

の両辺を x で微分すると,

$$8x + 2y \cdot y' + 4y + 4xy' + 3 = 0.$$

$$\text{よって, } \varphi'(x) = y' = \boxed{-\frac{8x + 4y + 3}{4x + 2y}}.$$



(8) $(x, y) = (0, 2)$ において, (7) より $y' = -\frac{11}{4}$. よって, 接線の方程式は, $y = -\frac{11}{4}x + 2$.

(9)

$$F_x(x, y, \lambda) = 1 - \lambda(8x + 4y + 3) = 0,$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 2 - \lambda(2y + 4x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda(2x + y) = 0$$

とすると, $\lambda \neq 0$ であり, 2 式の差をとって $y = -2x - 1$ となるので, これを $g(x, y) = 0$ に代入すると, $3x - 3 = 0$ より $(x, y) = (1, -3)$ を得る. このとき $\lambda = -1$ に対して $F_x = F_y = 0$ が成り立っている. よって, $(x, y) = \boxed{(1, -3)}$.

(10) $g_x(x, y) = g_y(x, y) = 0$ は $8x + 4y + 3 = 4x + 2y = 0$ と同値であり, これを満たす (x, y) は存在しない. よって, Lagrange の未定乗数法と (9) より, 極値をとる点の候補 (停留点) は $(x, y) = (1, -3)$ である. 極値をとるかどうか判定するために, $(1, -3)$ の近くで $g(x, y) = 0$ によって定義される陰関数 $\varphi(x)$ をとり, $f(x, y)$ を 1 変数化した関数 $h(x) = f(x, \varphi(x)) = x + 2\varphi(x)$ を考える. $h''(x) = 2\varphi''(x)$ だから, 点 $(1, -3)$ で y'' の符号を調べればよい.

$$y' = -\frac{8x + 4y + 3}{4x + 2y} = -2 - \frac{3}{2(2x + y)}$$

より,

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 + y'}{(2x + y)^2}.$$

$(x, y) = (1, -3)$ において $2 + y' = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$ だから, $y'' > 0$. よって $h'' > 0$ である. したがって, $f(x, y)$ は $\boxed{\text{点 } (1, -3) \text{ で極小値 } -5 \text{ をとる}}$.

- 5 (11) 連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持てばよい. 行基本変形により,

$$[A \ \mathbf{b}] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 & \alpha - 2 \end{bmatrix} \text{ となるから, 求める条件は } \boxed{\alpha \neq 3}.$$

(12) $\alpha \neq 3$ のとき, $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となるから, $\text{Ker } f$ の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}$.

(13) $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$ は $\text{Im } g$ の基底だから, 連立1次方程式 $A \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ の解空間が1次元であればよい.

$$A \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 2 & -2 \\ \alpha & -2\alpha - \beta + 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -2\beta - 2 \\ 0 & -\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 2 \end{bmatrix}$$

より, 求める条件は $-2\beta - 2 = -\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 2 = 0$ すなわち $\boxed{\alpha = 3 \text{ かつ } \beta = -1}$.

- 6 (14) $f(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $f(\mathbf{a}_2) = 4\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2$, $f(\mathbf{a}_3) = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ より, 表現行列は

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}.$$

- (15) $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ は1次独立だから, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in W$ であれば基底になる. 行基本変形により,

$$[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k + 8 \end{bmatrix} \text{ となるから, 求める条件は } \boxed{k = -8}.$$

- (16) $k = -8$ のとき, 上の基本変形により, $[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ となるから,

基底変換行列は, $\boxed{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$.

- (17) (14) と (16) の結果により, 求める表現行列は,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}}.$$

7 (18) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$

より, A の固有値は $\boxed{1, 2}$.

$$(19) \lambda = 1 \text{ のとき, } E - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, 固有値 } 1 \text{ に対応す}$$

$$\text{る固有空間の基底は, } \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

$$(20) \lambda = 2 \text{ のとき, } 2E - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, 固有値 } 2 \text{ に対}$$

$$\text{応する固有空間の基底は, } \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \text{ よって, } P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$AP = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ が成り立つ. ここで, } [P \ E_3] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{より } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ だから,}$$

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 & -2^n + 1 \\ -2^n + 1 & 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので, A^n の $(2, 1)$ 成分は $\boxed{2^n - 1}$.