

令和6年度 数学演習第二 期末統一試験【問題用紙】

2025 年 1 月 29 日実施・試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入すること —

1 次の 2 重積分の値を計算せよ.

$$(1) \iint_D (x+y) dx dy, \quad D: x \leq 1, y \geq 0, x-y \geq 0.$$

$$(2) \iint_D e^y dx dy, \quad D: y \leq 1, y \leq x \leq 2y.$$

$$(3) \iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x.$$

$$(4) \iint_D \frac{dx dy}{1 + (2x - y)^2}, \quad D: 0 \leq 2x - y \leq 1, 0 \leq x - 2y \leq 2x - y + 1.$$

2 (5) xy 平面内の領域 $D = \{(x, y) \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$ と連続関数 $f(x, y)$ に対して, (r, θ) を極座標とすると,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\boxed{\text{ア}}} d\theta \int_{\boxed{\text{イ}}}^{\boxed{\text{ウ}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \boxed{\text{エ}} dr$$

が成り立つ. **ア** から **エ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

3 (6) 3 重積分

$$I = \iiint_V x^2 y z dx dy dz, \quad V: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq xyz \leq 2$$

を考える. 変数変換 $s = x, t = xy, u = xyz$ に対して, ヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)}$ を s, t, u の式で表すと $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)} = \boxed{\text{カ}}$ となり, これを用いて I の値を計算すると $I = \boxed{\text{キ}}$ となる. **カ** と **キ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

4 2 変数関数 $g(x, y) = 4x^2 + y^2 + 4xy + 3x - 4$ について考える. $g(x, y) = 0$ で定義される陰関数を $y = \varphi(x)$ として, 以下の設問に答えよ.

(7) $\varphi'(x)$ を x, y の有理式で表せ.

(8) 曲線 $g(x, y) = 0$ 上の点 $(0, 2)$ における接線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ.

(9) $f(x, y) = x + 2y, F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とおく. ある実数 λ が存在して

$$F_x(x, y, \lambda) = 0, \quad F_y(x, y, \lambda) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

が成り立つような (x, y) をすべて求めよ.

(10) 条件 $g(x, y) = 0$ の下で, 関数 $f(x, y) = x + 2y$ の極値をすべて求め, 解答欄には「点 (c, d) で極大値 (または極小値) m をとる」という形式で答えを記せ.

5 α を実数とし, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ とおく. また, 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める. このとき, 以下の設問に答えよ.

(11) $\mathbf{b} \in \text{Im } f$ となるための α に対する条件を求めよ.

(12) α が (11) で求めた条件を満たすとき, $\text{Ker } f$ の基底を 1 組求めよ. ただし, 基底をなすベクトルはすべての成分が整数となるように選ぶこと.

(13) β を実数とし, 線形写像 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

で定めるとき, $\dim(\text{Im } g \cap \text{Ker } f) = 1$ となるための α, β に対する条件を求めよ.

6 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ とし, $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W を $W = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ と定める. また, 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow W$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = (2x_1 + x_2)\mathbf{b}_1 - x_3\mathbf{b}_2$$

で定義する. このとき, 以下の設問に答えよ.

(14) 基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ に関する f の表現行列を求めよ.

(15) k を実数とし, $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ k \end{bmatrix}$ とするとき, $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ が W の基底になるための k に対する条件を求めよ.

以下では, k は (15) で求めた条件を満たすとする.

(16) 基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{C}$ への基底変換行列を求めよ.

(17) 基底 $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ に関する f の表現行列を求めよ.

7 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の設問に答えよ.

(18) A の固有値をすべて求めよ.

(19) A の最小の固有値に対する固有空間の基底を 1 組求めよ. ただし, 基底をなすベクトルはすべての成分が整数となるように選ぶこと.

(20) n を自然数とするととき, A^n の (2, 1) 成分 を求めよ.