

数学演習第二（演習第1回）【解答例】

線形：前期線形の復習（空間の直線と平面、内積・外積を含む） 2025 年 10 月 1 日

演習問題 a

a1 (1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$. $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) は,
 $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{2}$ より, $\theta = \frac{\pi}{3}$. また, $\mathbf{v}$ の $\mathbf{u}$ への正射影は $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. 更に, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の作る
 平行四辺形の面積は $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 3\sqrt{3}$. ($\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$ を計算してもよい.)

(2) $\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$ より, $\|\mathbf{b}_1\| = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|}$. また, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ だから, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2$.
 よって, $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}_2\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}_2\|$ (最後の等式で $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}_2$ を用いた). したがって, $\|\mathbf{b}_2\| = \frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|}$.
 また, $\|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{b}_1\|^2} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}}{\|\mathbf{a}\|}$ と書くこともできる.

(3) $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ を第 1 列に関して余因子展開し, 外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

また, $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ を第 3 列に関して余因子展開すれば, 同様な計算により $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ となり,

$$\boxed{\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}$$

が得られる. (第二の等号については, 行列式の性質を用いて

$$\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = -\det[\mathbf{a} \ \mathbf{c} \ \mathbf{b}] = \det[\mathbf{c} \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

と考えてもよい.) 上の関係式より, ① $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}] = 0$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{b}] = 0$ (同じ列を含む行列式の値は 0). ② $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 \geq 0$. あとは $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が 1 次独立のとき $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ を示す必要があるが, 図形的に考えて $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = (\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積) より, これは明らか.

(4) 一般に $P\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot {}^tP\mathbf{b}$ が成り立つ. これを用いて, $Q\mathbf{a} \cdot Q\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot {}^tQQ\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. 更に, $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$(Q\mathbf{a} \times Q\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det[Q\mathbf{a} \ Q\mathbf{b} \ Q^tQ\mathbf{c}] = (\det Q) \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ {}^tQ\mathbf{c}] = \pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot {}^tQ\mathbf{c} = \pm Q(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

であるから, $Q\mathbf{a} \times Q\mathbf{b} = \pm Q(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ が従う.

a2 (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z - y \\ x - 2z \\ 2y - 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ は

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と書ける. ここで, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための条件を調べるために, $[A \ \mathbf{b}]$ に行基本変形を施す:

$$[A \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & b_1 \\ 1 & 0 & -2 & b_2 \\ -3 & 2 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & b_2 \\ 0 & -1 & 3 & b_1 \\ 0 & 2 & -6 & 3b_2 + b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & b_2 \\ 0 & 1 & -3 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 + 3b_2 + b_3 \end{bmatrix}.$$

よって, 解をもつための条件は $2b_1 + 3b_2 + b_3 = 0$ (すなわち, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$).

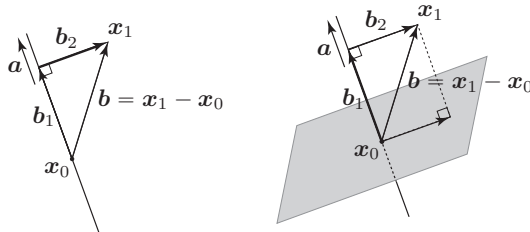
(2) (1) の条件が満たされるとき,

$$[A \ \mathbf{b}] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & b_2 \\ 0 & 1 & -3 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $\begin{cases} x - 2z = b_2 \\ y - 3z = -b_1 \end{cases}$ と同値. よって, $z = t$ とおくと,

解は, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a} \text{ に平行}} \quad (t \text{ は任意定数}).$

- a3** (1) (i) 点 x_1 と **c**(1) の直線との距離は **a1**(2) で $b = x_1 - x_0$ と考えたときの $\|b_2\|$ に等しい (下左図). よって, 求める距離は $\frac{\|a \times (x_1 - x_0)\|}{\|a\|}$. (“垂線の足” は $x_0 + b_1 = x_0 + \frac{a \cdot (x_1 - x_0)}{\|a\|^2} a$.)
- (ii) 点 x_1 と **c**(2) の平面との距離は **a1**(2) で $b = x_1 - x_0$ と考えたときの $\|b_1\|$ に等しい (下右図). よって, 求める距離は $\frac{|a \cdot (x_1 - x_0)|}{\|a\|}$. (“垂線の足” は $x_1 - b_1 = x_1 - \frac{a \cdot (x_1 - x_0)}{\|a\|^2} a$.) 平面が $ax + by + cz + d = 0$ と表されるなら $a \cdot x_0 + d = 0$ であるから, $a \cdot (x_1 - x_0) = a \cdot x_1 + d$ となり, 距離は $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ と表される.



- (2) (i) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 AB の方向ベクトルを与えるので, 直線 AB の方程式は $x - 1 = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z + 1}{3}$.
- (ii) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ が平面 ABC の法線ベクトルだから, 平面 ABC の方程式は $3(x - 1) + 5(y - 1) + 4(z + 1) = 0$. これを整理して, $3x + 5y + 4z = 4$.
- 次に, (1) の (ii) を利用するために, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (A の位置ベクトル), $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (D の位置ベクトル), $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (平面 ABC の法線ベクトル) とおけば, 点 D と平面 ABC の距離は $\frac{|a \cdot (x_1 - x_0)|}{\|a\|} = \frac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.
- (iii) (ii) と同じ意味で x_0, x_1, a を用いる. 直線 ℓ は点 A を通り, $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, その方程式は $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z + 1}{4}$. また, $a \times (x_1 - x_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ より, (1) の (i) を用いて, 点 D とこの直線の距離は $\frac{\|a \times (x_1 - x_0)\|}{\|a\|} = \frac{4\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 4$.

【注】 (ii), (iii) の距離は D から平面, 直線に下ろした垂線の長さである. (ii) では D から平面 ABC に垂線 DE を下ろせば, $E(-1 + 3t, 3 + 5t, 3 + 4t)$ が $3x + 5y + 4z = 4$ 上にあるから $t = -\frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{DE}\| = 2\sqrt{2}$. (iii) では D から “A を通る平面 ABC の法線” に垂線 DF を下ろせば, $F(1 + 3u, 1 + 5u, -1 + 4u)$ が $\overrightarrow{DF} \perp a$ を満たすから $u = \frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{DF}\| = 4$.

- (3) (i) 直線 ℓ 上の点 $(5t + 4, 3t - 1, -4t - 2)$ を平面 α の方程式 $5x - 4y - 3z = 5$ に代入して, $5(5t + 4) - 4(3t - 1) - 3(-4t - 2) = 5$ となり, $t = -1$. よって, 交点 x_0 の座標は $(-1, -4, 2)$.
- (ii) α の法線ベクトルが $a := \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$, ℓ の方向ベクトルが $b := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ より, b の平面 α への正射影は $b - \frac{b \cdot a}{\|a\|^2} a = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{25}{50} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. よって, 直線 m の方程式は $x + 1 = \frac{y + 4}{2} = \frac{z - 2}{-1}$.
- (iii) $c := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が直線 m の方向ベクトルであるから, 直線 ℓ, m のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすれば, $\cos \theta = \frac{|b \cdot c|}{\|b\| \|c\|} = \frac{|5 + 6 + 4|}{\sqrt{50} \sqrt{6}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$. (このとき, $\sin \theta = \frac{|a \cdot b|}{\|a\| \|b\|}$)

【注】 一般に, 2 直線の方向ベクトルが b, c であるとき, この 2 直線のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) は “ b, c のなす角” または “ $b, -c$ のなす角” のいずれかで与えられる. 従って, $\cos \theta = \frac{|b \cdot c|}{\|b\| \|c\|}$ が成り立つ.

(iv) 求める平面は $\mathbf{x}_0$ を通り, $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする. よって, 方程式は

$$5(x+1) + (y+4) + 7(z-2) = 0, \quad \text{すなわち} \quad 5x + y + 7z = 5.$$

(4) 2直線の方向ベクトルは $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. また, 2直線上の点は $(5s-c, 3s+1, 4s+2), (5t-4, -4t+5, 3t-1)$

とおけることに注意する.

(i) 2直線のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすれば, $\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{25}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \therefore \theta = \frac{\pi}{3}.$

(ii) $c = -1$ のとき, $(5s+1, 3s+1, 4s+2) = (5t-4, -4t+5, 3t-1) \Leftrightarrow (s, t) = (0, 1)$ より, 2直線は

$(1, 1, 2)$ で交わる. よって, 2直線を含む平面は点 $(1, 1, 2)$ を通り, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ -35 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトル

とするから, その方程式は $5(x-1) + (y-1) - 7(z-2) = 0. \therefore 5x + y - 7z + 8 = 0.$

(iii) $c = 14$ のとき, 与えられた2直線と求める直線(共通垂線)の交点は

$$A(5s-14, 3s+1, 4s+2), \quad B(5t-4, -4t+5, 3t-1)$$

とおける. $\overrightarrow{AB}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方と垂直であるから, $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. よって, $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -5s+5t+10 \\ -3s-4t+4 \\ -4s+3t-3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$

を満たす k が存在する. これより, $s = 1, t = 0, k = 1$. よって, $B(-4, 5, -1)$ となるから, 求める直線の方

程式は $\frac{x+4}{5} = y-5 = \frac{z+1}{-7}.$

レポート課題

I (1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -10 \end{bmatrix}. \quad (\text{結合法則は不成立})$

一般に, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ が成り立つ.

(2) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2.$

一般に, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det[\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]$ が成り立つ.

II (1) 拡大係数行列を簡約化すると, $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 & 8 \\ 2 & -3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

よって, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t は任意定数) となり, ℓ の方程式は $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{-2} = z.$

(2) 直線 ℓ の方向ベクトルは $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ だから, $\mathbf{b}$ の ℓ への正射影は, $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

演習問題 b

b1 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 2 & 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 9 & -10 & 25 \\ 0 & 10 & -7 & 36 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 10 & -7 & 36 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -37 & -74 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b2 (1) 係数行列の行列式は $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & a+1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2)$. よって,

- $a \neq -3, 2$ ならば, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & a+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(a+3)(a-2)} \begin{bmatrix} a+1 & -2 \\ -3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a-2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $a = -3$ ならば, $3x_1 - 2x_2 = 1$ となり, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. • $a = 2$ ならば解なし.

解をもつ条件は $a \neq 2$.

(2) $\begin{bmatrix} 5 & 17 & -13 & 2 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a-\frac{7}{2} \end{bmatrix}$
 より, 解をもつ条件は $a = \frac{7}{2}$. このとき, 解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b3 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 & -7 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 16 & -14 \\ 0 & 4 & a-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 0 & -2a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 非自明な解をもつ条件は $a = -\frac{1}{2}$.
 このとき, $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -(a-6) \\ 6 & a+3 & 6 \\ a & 3 & 3 \end{vmatrix} = (a-3)^2(a+3)$ より, 非自明な解をもつ条件は $a = \pm 3$. $a = 3$ のとき, (係数行列) $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $a = -3$ のとき, (係数行列) $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b4 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ より, 階数は 3 で, 逆行列は $\begin{bmatrix} 0 & 14 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 3 (< 4) で, 逆行列は存在しない.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より, 階数は 4 で, 逆行列は $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b5 (1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 11$. (2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -9 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12$.

(3) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3$.

(4) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = \dots = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$.

b6 (1) $\Delta(a, b, c) := \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b) = \overbrace{abc(a-b)(b-c)(c-a)}^{a, b, c \text{ は } 0 \text{ でなく, 互いに異なる}} \neq 0$.

(2) $x = \frac{\Delta(d, b, c)}{\Delta(a, b, c)} = \frac{dbc(d-b)(b-c)(c-d)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{d(d-b)(c-d)}{a(a-b)(c-a)}$, $y = \frac{d(a-d)(d-c)}{b(a-b)(b-c)}$, $z = \frac{d(b-d)(d-a)}{c(b-c)(c-a)}$.