

数学演習第二 (演習第2回) 【解答例】

微積：前期微積の復習 (広義積分を含む) 2025 年 10 月 8 日

演習問題 a

a1 $\frac{1}{x^s}$ ($x > 0$) の不定積分 (積分定数省略) は

$$0 < s \neq 1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x^s} = \int x^{-s} dx = \frac{x^{1-s}}{1-s}, \quad s = 1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x} = \log x.$$

これを用いて,

$$(1) \quad 0 < s \neq 1 \text{ のとき } \int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_{+0}^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-s} & (s < 1) \\ \infty & (s > 1) \end{cases}, \quad s = 1 \text{ のとき } \int_0^1 \frac{dx}{x} = [\log x]_{+0}^1 = \infty.$$

$$(2) \quad 0 < s \neq 1 \text{ のとき } \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^\infty = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & (s > 1) \\ \infty & (s < 1) \end{cases}, \quad s = 1 \text{ のとき } \int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\log x]_1^\infty = \infty.$$

a2 (1) $\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}(\log x)^2 \right]_{+0}^1 - 4 \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = -4 \left[2\sqrt{x} \log x \right]_{+0}^1 + 8 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8 \left[2\sqrt{x} \right]_{+0}^1 = 16.$

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \left[\sin^{-1} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_{+0}^{1-0} = \left[\sin^{-1}(2x-1) \right]_{+0}^{1-0} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

$$(3) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \left[\log \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(1+x)} \right) \right]_{+0}^1 = \log \frac{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2 \log(1 + \sqrt{2}).$$

$$(4) \quad \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \text{ より,}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$(5) \quad \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \text{ より,}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \left[\log \frac{x+2}{x+3} \right]_0^\infty = \log \frac{3}{2}.$$

(6) 部分積分を繰り返して,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx &= \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \cos x dx = \int_0^\infty e^{-x} \cos x dx \\ &= \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx = 1 - \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx. \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx \left(= \int_0^\infty e^{-x} \cos x dx \right) = \frac{1}{2}.$$

$$(7) \quad \int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \log(1+x^2) \right]_{+0}^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = \left[2 \tan^{-1} x \right]_0^\infty = \pi.$$

$$(8) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x} \text{ より,}$$

$$\int_0^\infty (1 - \tanh x) dx = \left[x - \log(\cosh x) \right]_0^\infty = \left[\log \frac{e^x}{\cosh x} \right]_0^\infty = \left[\log \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \right]_0^\infty = \log 2.$$

$$(9) \quad \frac{1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh^2 x - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cosh x - 1} - \frac{1}{\cosh x + 1} \right) (\cosh x)' \text{ であるから, } t = \cosh x \text{ とおいて,}$$

$$\int_{\log 3}^\infty \frac{dx}{\sinh x} = \frac{1}{2} \int_{\cosh(\log 3)}^\infty \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left[\log \frac{t-1}{t+1} \right]_{\frac{5}{3}}^\infty = -\frac{1}{2} \log \frac{5-3}{5+3} = \log 2.$$

ここで, $\cosh(\log 3) = \frac{3+3^{-1}}{2} = \frac{5}{3}$ を用いた. 本質的に同じだが, $\int_{\log 3}^\infty \frac{dx}{\sinh x} = \frac{1}{2} \left[\log \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} \right]_{\log 3}^\infty = \log 2$ と計算してもよい.

a3 (1) まず, 区間 $(0, \pi)$ 上の正値連続関数 $\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ は $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称であるから,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することを示せば十分. 次に, $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において $y = \sin x$

は上に凸ゆえ $0 < \frac{2x}{\pi} \leq \sin x (\leq x)$ (右図参照), 従って $0 < \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

ここで, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} dx \stackrel{\frac{2x}{\pi}=y}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pi < \infty$ より $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ は収束する.

《別法》 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であるから, 区間 $(0, a]$ ($a > 0$: 十分小) において $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ が成り立つ.

よって, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 < \infty$ から $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x = 0$ の近くのみ).

(2) $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi} > 0$ より $|\log(\sin x)| = -\log(\sin x) \leq -\log \frac{2x}{\pi} (-\log x \text{ は単調減少関数}).$

ここで,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\log \frac{2x}{\pi}\right) dx \stackrel{\frac{2x}{\pi}=y}{=} -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \log y dy = \frac{\pi}{2} < \infty$$

であるから, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$ は収束する. (値は $-\frac{\pi}{2} \log 2$ となることが知られている.)

《別法》 $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \log(\sin x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\sin x)}{x^{-1/2}} \stackrel{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = -2 \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \sqrt{x} \cos x\right) = 0$ で

あるから, 区間 $(0, a]$ ($a > 0$: 十分小) において $|\log(\sin x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 < \infty$ から

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x = 0$ の近くのみ).

(3) $0 < x \leq 1$ において $\left|\frac{\log x}{1+x^2}\right| \leq |\log x|$ で, $\int_0^1 |\log x| dx = -\int_0^1 \log x dx = 1 < \infty$ であるから $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} dx$

は収束する. 次に, $x \geq 1$ において, $0 \leq \frac{\log x}{1+x^2} = \frac{\log x}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leq \frac{C}{x^{3/2}}$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ より, $x \geq 1$ において

$0 \leq \frac{\log x}{\sqrt{x}} \leq \exists C < \infty$) であり, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 < \infty$ であるから $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx$ も収束する. よって,

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx$$

は収束する. (実は, $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx \stackrel{\frac{1}{x}=y}{=} \int_1^0 \frac{\log \frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}} \left(-\frac{dy}{y^2}\right) = -\int_0^1 \frac{\log y}{y^2+1} dy = -\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} dx$ であるから,

$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0$ と分かる.)

レポート課題

I (1) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} \log x dx = \left[-2x^{-\frac{1}{2}} \log x\right]_1^{\infty} + 2 \int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-1} dx = 2 \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^{\infty} = 4.$

(2) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{3} \left[\log \frac{x}{x+3}\right]_1^{\infty} = \frac{2}{3} \log 2.$

(3) 部分積分を 2 回繰り返す.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx &= \frac{1}{b} \left[e^{-ax} \sin bx\right]_0^{\infty} + \frac{a}{b} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx \\ &= \frac{a}{b^2} \left[-e^{-ax} \cos bx\right]_0^{\infty} - \frac{a^2}{b^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx. \end{aligned}$$

よって, $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^{-1} \frac{a}{b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$ (同様にして $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$)

II $0 < x \leq 1$ において, $0 < \frac{x^{a-1}}{1+x} \leq x^{a-1} = \frac{1}{x^{1-a}}$ であり, $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}} = \frac{1}{a} < \infty$ であるから $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}$ は収束する.

次に, $1 \leq x < \infty$ において, $0 < \frac{x^{a-1}}{1+x} \leq \frac{x^{a-1}}{x} = \frac{1}{x^{2-a}}$ であり, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-a}} = \frac{1}{1-a} < \infty$ であるから $\int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$ も収束する. よって, $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$ は収束する.

演習問題 b

b1 (1) $\sin \frac{10\pi}{9} = \sin\left(\pi - \frac{10\pi}{9}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right) = \cos \frac{11\pi}{18}$ かつ $0 < \frac{11\pi}{18} < \pi$ であるから,
 $\text{Cos}^{-1}\left(\sin \frac{10\pi}{9}\right) = \frac{11\pi}{18}$.

(2) $\alpha = \text{Tan}^{-1}(-2)$ とおけば $\tan \alpha = -2$ かつ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. このとき, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5}$. $\cos \alpha > 0$ より $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

(3) $\alpha = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{2}$, $\beta = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{7}$ とおけば, $0 < \frac{1}{7} < \frac{1}{2} < 1$ より $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{4}$ となり, $0 < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$. 一方,
 $\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$, $\tan \beta = \frac{1}{7}$ より, $\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = 1$. よって, $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

b2 (1) $f'(x) = \frac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$.

(2) $\log|x^3 - 3x + 2| = 2\log|x - 1| + \log|x + 2|$ より, $n \geq 1$ に対して,

$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)! \left\{ \frac{2}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} \right\}.$$

(3) ライブニッツの公式を用いて,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x^2 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\pi\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1) \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= \{x^2 - n(n-1)\} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

b3 いずれも $x \rightarrow 0$ で考える.

(1) $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, $\log(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4)$ より,
 $e^{-x} \log(1 + 2x) = 2x - 4x^2 + \frac{17}{3}x^3 - 8x^4 + o(x^4)$.

(2) $e^{\cos x} = e^{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} = e \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 + o(x^4) \right\} = e \left\{ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \right\}$,
 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$ より, $\frac{e^{\cos x}}{\sqrt{1-x^2}} = e + \frac{7e}{24}x^4 + o(x^4)$.

(3) $\{\log(\sqrt{1+x^2} - x)\}' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ を積分して, $\log(\sqrt{1+x^2} - x) = -x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

b4 (1) ロピタルの定理を用いて, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{e^{3x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{3e^{3x}} = \frac{2}{3}$.

(2) $x \rightarrow 0$ のとき, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ を積分して, $\text{Tan}^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$,
 $\text{Sin}^{-1} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. よって, $\frac{\text{Tan}^{-1} x - x}{\text{Sin}^{-1} x - x} = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \rightarrow -2$. ロピタルの定理を用いてもよい.

(3) $x \rightarrow 0$ のとき, $(e^{x^2} - 1 - x^2) \tan x = \left(\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)(x + o(x)) = \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$, $6 \sin x - 6x + x^3 = 6\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) - 6x + x^3 = \frac{1}{20}x^5 + o(x^5)$ より, $\frac{6 \sin x - 6x + x^3}{(e^{x^2} - 1 - x^2) \tan x} = \frac{\frac{1}{20}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)} \rightarrow \frac{1}{10}$.

(4) $\log(a \text{Tan}^{-1} x)^x = x \log(a \text{Tan}^{-1} x)$ において, $x \rightarrow \infty$ のとき $\log(a \text{Tan}^{-1} x) \rightarrow \log \frac{\pi a}{2} \leq 0$ ($a \leq \frac{2}{\pi}$) であるから, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log(a \text{Tan}^{-1} x) = -\infty$ ($0 < a < \frac{2}{\pi}$), $= \infty$ ($a > \frac{2}{\pi}$). $a = \frac{2}{\pi}$ のときは不定形であり, ロピタルの定理により, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(\frac{2}{\pi} \text{Tan}^{-1} x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{Tan}^{-1} x) + \log \frac{2}{\pi}}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\text{Tan}^{-1} x} \frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}$. よって求める極限値は $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

- (5) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ より $\frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$. これと $\log(1+x) = x + o(x)$ とから, $\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\log(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{1}{3}$. よって, 求める極限值は $e^{1/3}$.

b5 (1) e^x を有限マクローリン展開すると, $\mathbb{R}$ 上で,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta = \theta(x) < 1).$$

$x \geq 0$ においては $R_{n+1}(x) \geq 0$ であるから, $e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ が成り立つ.

(2) $\log(1+x)$ を有限マクローリン展開すると, $x > -1$ のとき,

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_{2n+1}(x), \quad R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x)^{2n+1}} \quad (0 < \theta = \theta(x) < 1).$$

$x \geq 0$ においては

$$0 \leq R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x)^{2n+1}} \leq \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

であるから, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \log(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ が成り立つ.

b6 (1) $\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} \, dx,$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x - \int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x)$$

であるから,

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \sin^{-1} x + \frac{1}{4}(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x) = \frac{1}{4}(2x^2 - 1) \sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}.$$

《別法》 $\theta = \sin^{-1} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ とおけば, $x = \sin \theta$, $dx = \cos \theta \, d\theta$ であり,

$$\begin{aligned} \int x \sin^{-1} x \, dx &= \int \theta \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int \theta \sin 2\theta \, d\theta = -\frac{1}{4}\theta \cos 2\theta + \frac{1}{4} \int \cos 2\theta \, d\theta \\ &= -\frac{1}{4}\theta \cos 2\theta + \frac{1}{8} \sin 2\theta = -\frac{1}{4}\theta(1 - 2\sin^2 \theta) + \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{4}(2x^2 - 1) \sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

(2) 定積分は (広義積分の意味でも) 存在しない. 実際,

$$\int_0^1 \frac{6x+1}{3x^2+x-2} \, dx = \int_0^1 \frac{(3x^2+x-2)'}{3x^2+x-2} \, dx = \left[\log|(3x-2)(x+1)| \right]_0^1 = \log 1 = 0$$

と計算したくなるところだが, 被積分関数は区間 $[0, 1]$ 上の点 $x = 2/3$ で不連続かつその点の近傍で非有界であるから, 次のように積分区間を分割して広義積分の意味で解釈して,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{6x+1}{3x^2+x-2} \, dx &= \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{6x+1}{3x^2+x-2} \, dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{6x+1}{3x^2+x-2} \, dx \\ &= \left[\log\{(2-3x)(x+1)\} \right]_0^{\frac{2}{3}-0} + \left[\log\{(3x-2)(x+1)\} \right]_{\frac{2}{3}+0}^1 = (-\infty) + \infty \quad (\text{不定}). \end{aligned}$$

(3) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$ より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+2\cos x} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 \, dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2 \, dt}{3-t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}-t} + \frac{1}{\sqrt{3}+t} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\log \frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\log 2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$