

数学演習第二 (演習第3回)

線形：ベクトル空間・部分空間

2025 年 10 月 22 日

【要点】

ベクトル空間 V (線形教科書 p.102–103) の空でない部分集合 W が (V の和・スカラー倍に関して) ベクトル空間の性質を満たすとき, W は V の**部分空間**であるという.

〈部分空間の条件〉 (線形教科書 p.105)

ベクトル空間 V の部分集合 W が V の部分空間であるための必要十分条件は次の 3 条件すべてを満たすことである:

$$(i) \mathbf{0} \in W. \quad (ii) \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W. \quad (iii) \mathbf{a} \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\mathbf{a} \in W.$$

[注] (ii), (iii) の下で (i) は $W \neq \emptyset$ と同値である. (i) は単純な条件であるが, W が部分空間であるかどうかの判断の第一歩となる.

〈生成される部分空間に含まれる条件〉 (線形教科書 p.108–110)

ベクトル空間 V において, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in V$ の 1 次結合全体の集合

$$\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \rangle = \{c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_r\mathbf{a}_r \mid c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}\}$$

は部分空間となる. これを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ によって**生成される部分空間**という.

数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^m$ の元 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ に対して,

$$\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \rangle \Leftrightarrow c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{b} \text{ と表せる } (\mathbf{b} \text{ は } \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \text{ の 1 次結合}).$$

$$\Leftrightarrow \text{非同次連立一次方程式 } [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \mathbf{b} \text{ が解を持つ.}$$

教科書

定理 8.4

$\Leftrightarrow$

$$\text{rank}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r] = \text{rank}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \mid \mathbf{b}].$$

なお, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$ が $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ に属するかどうかを調べたければ, $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \mid \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s]$ を行基本変形してその階数を同時に調べるのが早い.

[注] $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^m$ をこの順に並べてできる $m \times r$ 行列を $[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_r]$ または $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r]$ と表す.

〈2つの部分空間の共通部分と和空間〉 (線形教科書 p.110–111)

ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し,

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{v} \in W_2\} \quad (W_1, W_2 \text{ の共通部分}),$$

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\} \quad (W_1, W_2 \text{ の和空間})$$

は, いずれも V の部分空間となる.

演習問題

1 部分空間の判定

次のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ.

$$(1) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ または } y > 0 \right\} \quad (2) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \text{ は整数} \right\}$$

$$(3) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\} \quad (4) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \right\}$$

$$(5) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0 \right\} \quad (6) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 7y + 4z = 0 \end{array} \right\}$$

$$(7) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 5 \\ x - 4y + 2z = -1 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

$$(8) W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{連立一次方程式} \begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ x - 4y + 2z = b \\ x - 3y + 2z = c \end{cases} \text{ が解を持つ} \right\}$$

2 生成される部分空間

次のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ または $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W に対して, 与えられた $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ が W に属するか判定せよ. ただし, (3) については $\mathbf{v} \in W$ となるための a, b, c の条件を求めよ.

$$(1) W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$(2) W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$(3) W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$(4) W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(5) W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3 [共通部分と和空間]

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

について, W_1, W_2 , 共通部分 $W_1 \cap W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ をそれぞれ異なる xy 平面上に図示せよ. また, 和集合 $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間でないことを確認せよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について, $\mathbb{R}^3$ を xyz 座標を用いて表記した場合, $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ は $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか. すなわち,

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 + W_2$ となるとき, それぞれの x, y, z の関係を x, y, z の方程式で示し, その方程式が表す図形を答えよ.

レポート課題

[部分空間の判定] 次のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ.

$$(1) \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

$$(2) \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \right\}$$

[生成される部分空間と共通部分]

$$(3) \quad \mathbb{R}^3 \text{ の部分空間 } W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ とベクトル } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ に対して, } \mathbf{v} \in W \text{ となる } a \text{ を求めよ.}$$

(4) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について, $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ は $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか. すなわち,

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ となるとき, それぞれの x, y, z の関係を x, y, z の方程式で示し, その方程式が表す図形を答えよ.