

## 数学演習第二 (演習第3回) 【解答例】

線形：ベクトル空間・部分空間 (2025 年 10 月 22 日実施)

### 演習問題

1 部分空間となる条件は、【要点】の〈部分空間の条件〉(i), (ii), (iii) を満たすことである。逆に言えば、部分空間とならないことを示すには条件 (i), (ii), (iii) のいずれかひとつを満たさない具体的な反例をあげればよい。

(1)  $\mathbf{0} \notin W$  なので部分空間ではない。

(2)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$  だが、その  $1/2$  倍は  $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \notin W$  なので部分空間ではない。

(3)  $\mathbf{0} \in W$ .  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$  のとき、 $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = (x_1 + 2y_1 + 3z_1) +$

$(x_2 + 2y_2 + 3z_2) = 0$  なので、 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \in W$ . また、 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}$  に

対し、 $kx + 2(ky) + 3(kz) = k(x + 2y + 3z) = 0$  より、 $k \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix} \in W$ . 以上により条件

(i), (ii), (iii) の全てを満たすので、 $W$  は部分空間。

(4)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$  であるが、その和  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin W$  なので部分空間ではない。

(5)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$  であるが、その和  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$  なので部分空間ではない。

(6) (3) と同じようにして確認できるが、(3), (6) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間である (教科書 命題 15.4)。

(7)  $\mathbf{0}$  が属していないので部分空間ではない。

(8)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$  とおけば、 $W = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{連立一次方程式 } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解 } \mathbf{x} \text{ を持つ}\}$  と表せる。

まず、 $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$  より  $\mathbf{0} \in W$ . 次に、 $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in W$  とすれば、 $W$  の定義により  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}, A\mathbf{x}'_0 = \mathbf{b}'$  を満たす  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0 \in \mathbb{R}^3$  が存在する。このとき、

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'_0) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}'_0 = \mathbf{b} + \mathbf{b}', \quad A(k\mathbf{x}_0) = kA\mathbf{x}_0 = k\mathbf{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

であるから、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{b}'$  は解  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$  を持ち、 $A\mathbf{x} = k\mathbf{b}$  は解  $\mathbf{x} = k\mathbf{x}_0$  を持つ。よって、 $\mathbf{b} + \mathbf{b}', k\mathbf{b} \in W$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) が示された。以上により、条件 (i), (ii), (iii) の全てを満たすので、 $W$  は部分空間である。

2 (1)  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right]$  より、 $\mathbf{v} \notin W, \mathbf{w} \in W$ .

$$(2) \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 7 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -22 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -22 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \end{array} \right] \text{ より,}$$

$v \in W, w \in W$ .

$$(3) \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & 5 & 1 & b \\ 2 & 3 & 4 & c \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 10 & b-3a \\ 0 & -1 & 10 & c-2a \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -10 & 3a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array} \right] \text{ より,}$$

$v \in W \Leftrightarrow a - b + c = 0$ .

$$(4) \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \text{ より,}$$

$v \in W, w \notin W$ .

$$(5) \left[ \begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

より,  $v \notin W, w \in W$ .

- 3** (1)  $W_1$  は直線  $y = \frac{2}{3}x$  (図 1).  $W_2$  は直線  $y = -x$  (図 2). 共通部分  $W_1 \cap W_2$  は 2 直線の交点の原点のみ (図 3). 和集合  $W_1 \cup W_2$  は 2 直線  $y = \frac{2}{3}x, y = -x$  の合併 (図 4). 和空間  $W_1 + W_2$  は平面全体 (図 5).  $\mathbb{R}^2$  の任意のベクトルが  $W_1, W_2$  に平行なベクトルの和で書けることは明らか (与えられたベクトルを対角線とし,  $W_1, W_2$  に平行な辺をもつ平行四辺形を考えよ).

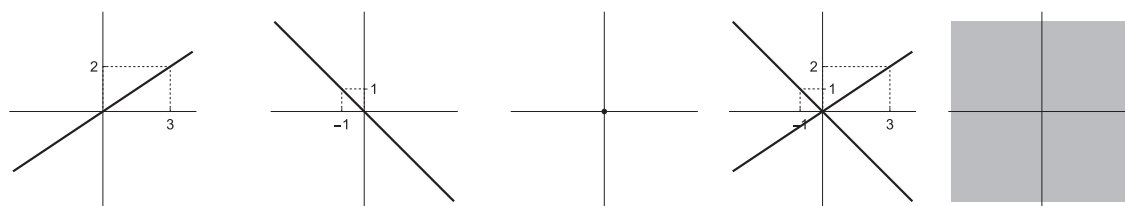


図 1.  $W_1: y = \frac{2}{3}x$  図 2.  $W_2: y = -x$  図 3.  $W_1 \cap W_2$  図 4.  $W_1 \cup W_2$  図 5.  $W_1 + W_2$

また,  $W_1 \cup W_2$  が  $\mathbb{R}^2$  の部分空間とならないことは,  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  が直線  $W_1: y = \frac{2}{3}x$  上にも直線  $W_2: y = -x$  上にもないため,  $W_1 \cup W_2$  に属さないことからわかる.

- (2)  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$  となる条件は,  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -5 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & -6 & -x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 2x+3y+z \end{array} \right]$  より,  $2x + 3y + z = 0$ . つまり,  $W_1$  は平面  $2x + 3y + z = 0$  を表している. 別の見方をすると,  $W_1 = \{c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$  は,  $\mathbb{R}^3$  内で  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  によって張られる平面であるから,  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  を法線ベクトルとし, 原点を通る平面  $2x + 3y + z = 0$  となる.

同様に,  $W_2$  についても,  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 2 & x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 3x-2y+z \end{array} \right]$  より,

$W_2$  は平面  $3x - 2y + z = 0$ . 外積  $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  からわかる.

共通部分  $W_1 \cap W_2$  は連立一次方程式  $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$  の解全体に一致するから,

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$  から,  $W_1 \cap W_2$  に属する元は  $k \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) となる. これは, 原点を通り, 方向ベクトル  $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$  の直線  $\frac{x}{5} = y = \frac{z}{-13}$  である. 別の見方をすると, 2つの平面  $W_1, W_2$  の交線は,  $W_1, W_2$  の法線ベクトル  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4$  のいずれとも垂直であるから,  $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -26 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$  を方向ベクトルとし, 原点を通る直線  $\frac{x}{5} = y = \frac{z}{-13}$  となる.

また,  $\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -5 & -1 & 2 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2x+3y+z \end{array} \right]$  から,  $\mathbb{R}^3$  のどんなベクトルも  $W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$  に属することがわかるので,  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ . なお,  $W_1 \cup W_2$  が  $\mathbb{R}^3$  の部分空間とならないことは,  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  が平面  $W_1: 2x+3y+z=0$  上にも平面  $W_2: 3x-2y+z=0$  上にもないため,  $W_1 \cup W_2$  に属さないことからわかる.

## レポート課題

(1)  $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 5z - 8y = 0 \\ 8x - 2z = 0 \\ 2y - 5x = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ 5t \\ 8t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\} \left( = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle \right)$  と表される.  $t = 0$  と  
 して,  $\mathbf{0} \in W$ . さらに,  $t_1, t_2, k \in \mathbb{R}$  に対して,

$$\begin{bmatrix} 2t_1 \\ 5t_1 \\ 8t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t_2 \\ 5t_2 \\ 8t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(t_1 + t_2) \\ 5(t_1 + t_2) \\ 8(t_1 + t_2) \end{bmatrix}, \quad k \begin{bmatrix} 2t_1 \\ 5t_1 \\ 8t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(kt_1) \\ 5(kt_1) \\ 8(kt_1) \end{bmatrix} \in W.$$

よって,  $W$  は条件 (i), (ii), (iii) を満たすので,  $\mathbb{R}^3$  の部分空間である.

《別法 1》まず,  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  より  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$ . 次に,  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}$  とすれば,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(z_1 + z_2) - 8(y_1 + y_2) \\ 8(x_1 + x_2) - 2(z_1 + z_2) \\ 2(y_1 + y_2) - 5(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5z_1 - 8y_1 \\ 8x_1 - 2z_1 \\ 2y_1 - 5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5z_2 - 8y_2 \\ 8x_2 - 2z_2 \\ 2y_2 - 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(kz_1) - 8(ky_1) \\ 8(kx_1) - 2(kz_1) \\ 2(ky_1) - 5(kx_1) \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} 5z_1 - 8y_1 \\ 8x_1 - 2z_1 \\ 2y_1 - 5x_1 \end{bmatrix} = k \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから,  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in W$ . よって,  $W$  は条件 (i), (ii), (iii) を満たすので,  $\mathbb{R}^3$  の部分空間である. (上の証明は, 外積に関する演算法則  $\mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{a} \times (k\mathbf{x}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{x})$  を示すことも含んでいるので, これを既知とするなら証明はずっと短くなる.)

《別法 2》  $A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 8 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  とおけば,  $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  と書ける. よって,  $W$  は同次連立一次方程式の解空間であるから部分空間となる (教科書 命題 15.4).

(2)  $x = y = z = 0$  のとき  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \neq 1$  より,  $\mathbf{0} \notin W$  となるので,  $W$  は部分空間ではない.

(3)  $\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & 10 & 2a+5 \\ 0 & -3 & -3a+4 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & -3 & -3a+4 \\ 0 & 0 & -24a+55 \end{array} \right]$  より,  $\mathbf{v} \in W$  となる  $a$  は  $a = \frac{55}{24}$ .

(4) •  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$  となる条件は,  $\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & -2 & y \\ -3 & 1 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & -2x+y \\ 0 & 4 & 3x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & -2x+y \\ 0 & 0 & x+y+z \end{array} \right]$  より,  $x + y + z = 0$ . つまり,  $W_1$  は平面  $x + y + z = 0$  を表す. ( $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  を用いてもよい)

•  $W_2$  についても, 同様に  $\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ -2 & -5 & y \\ 3 & 3 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ -2 & -5 & y \\ 1 & 4 & -x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -x+z \\ 0 & 3 & -2x+y+2z \\ 0 & -9 & 3x-2z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -x+z \\ 0 & 3 & -2x+y+2z \\ 0 & 0 & -3x+3y+4z \end{array} \right]$  より,  $W_2$  は平面  $3x - 3y - 4z = 0$  を表す. ( $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4$  を用いてもよい)

• 共通部分  $W_1 \cap W_2$  は連立一次方程式  $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - 3y - 4z = 0 \end{cases}$  の解全体に一致する.  $\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array} \right]$  から,  $W_1 \cap W_2$  に属する元は,  $k \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) となる. よって,  $W_1 \cap W_2$  は原点を通り, 方向ベクトル  $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$  の直線:  $x = \frac{y}{-7} = \frac{z}{6}$  である.

**3** (2) の別解と同様に, 2つの平面  $W_1, W_2$  の交線は  $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4) = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$  を方向ベクトルとし, 原点を通る直線と考えてもよい.

• 最後に, 和空間  $W_1 + W_2$ , 和集合  $W_1 \cup W_2$  についても触れておく.  $\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & x \\ 2 & -2 & -2 & -5 & y \\ -3 & 1 & 3 & 3 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & -4 & -6 & -3 & -2x+y \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 3x+z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & -4 & -6 & -3 & -2x+y \\ 0 & 0 & 3 & -3 & x+y+z \end{array} \right]$  から,  $\mathbb{R}^3$  のどんなベクトルも  $W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$  に属することがわかるので,  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ . 一方,  $W_1 \cup W_2$  は  $\mathbb{R}^3$  の部分空間とならない. 実際,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \in W_1 \cup W_2$  であるが,  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  が平面  $W_1: x + y + z = 0$  上にも平面  $W_2: 3x - 3y - 4z = 0$  上にもないため,  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \notin W_1 \cup W_2$  となる.