

数学演習第二（演習第9回） 【解答例】

線形：線形写像, 核と像 2025年 12月 17日

演習問題

1 (1) 例えば, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 0$ より, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 0$,
 $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2$. よって, f は線形写像でない.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ と行列の掛け算で表されるので, f は線形写像である.

次のように線形写像の条件を確認してもよい. 任意の $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ x_3 + x'_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + x'_1) + (x_2 + x'_2) \\ (x_1 + x'_1) + (x_3 + x'_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + (x'_1 + x'_2) \\ (x_1 + x_3) + (x'_1 + x'_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 + x'_2 \\ x'_1 + x'_3 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}\right), \end{aligned}$$

$$f\left(k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1 + kx_2 \\ kx_1 + kx_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} = kf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$$

が成り立つ. よって, f は線形写像である.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となるので, f は線形写像でない.

(4) 任意の $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_n, k \in \mathbb{R}$ に対して, $r(x) = p(x) + q(x), s(x) = kp(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ とおけば,

$$T(p(x) + q(x)) = T(r(x)) = r(x+1) = p(x+1) + q(x+1) = T(p(x)) + T(q(x)),$$

$$T(kp(x)) = T(s(x)) = s(x+1) = kp(x+1) = kT(p(x))$$

が成り立つ. よって, T は線形写像である.

2 (i) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. よって, $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$,
 $\text{Ker } f$ の基底は無く, $\dim \text{Ker } f = 0$ である.

(2) $\text{Im } f = C(A)$ の基底は A の2つの列ベクトルの中から1次独立な最大個数の組を選ばばよい. A の簡約行列の主成分は第1列と第2列にあるので, 2つの列ベクトルから1番目と2番目を選んだ組, すなわち

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \text{ を } \text{Im } f \text{ の基底として選ぶことができる. よって, } \dim \text{Im } f = 2.$$

(3) $\dim \text{Ker } f = 0, \dim \text{Im } f = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ なので, f は単射であるが全射でない.

(ii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であるから, $Ax = \mathbf{0}$ の解は $x = \mathbf{0}$ のみ. すなわち, $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$,
 $\dim \text{Ker } f = 0$ である. ($\text{Ker } f$ の基底は無し)

(2) A の簡約行列の主成分がすべての列にあるから, $\text{Im } f$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$ を選ぶことができ, $\dim \text{Im } f = 3$. ($\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ であるから, $\text{Im } f$ の基底として, \mathbb{R}^3 の標準基底を選んでもよい.)

(3) $\dim \text{Ker } f = 0, \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$ なので, f は単射かつ全射 (全単射) である.

【注意】線形変換 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対しては, 単射であることと全射であることは同値である (系 22.7).

(iii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される. よって, $\text{Ker } f$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ を選ぶことができ, $\dim \text{Ker } f = 1$ である.

(2) A の簡約行列の主成分の位置を見て, A の 1 番目, 2 番目の列ベクトルを取れば $\text{Im } f$ の基底となることが分かる. $\text{Im } f$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ を選ぶことができ, $\dim \text{Im } f = 2$ である.

(3) $\dim \text{Ker } f = 1 \neq 0, \dim \text{Im } f = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ なので, f は単射でも全射でもない.

3

(1) **方法 1** 各 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ を求める. そのために, まず, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ を満たす $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を求めると, $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix}$. よって, f の線形性により,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left((-3x_1 + 2x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (2x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = (-3x_1 + 2x_2)f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + (2x_1 - x_2)f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= (-3x_1 + 2x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + (2x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ (2k - 15)x_1 + (10 - k)x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

方法 2 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は 3×2 行列 A を用いて $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表される. この行列 A を求めよう.

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ k \end{bmatrix} \quad \text{より,} \quad A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & k \end{bmatrix}.$$

よって,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2k - 15 & 10 - k \end{bmatrix}.$$

(2) (1) より, f は行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2k - 15 & 10 - k \end{bmatrix}$ を用いて $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表される. f が単射にならないのは

$\dim \text{Ker } f \neq 0$ のとき, すなわち $\text{rank } A \neq 2$ のときである. A は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 - k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と簡約化できるから, 求め

る条件は $k = 10$. この条件が成り立つとき, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ だから, $\dim \text{Im } f = 1$ で, $\text{Im } f$ の基底として

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$ がとれる.

4 (1) $f_A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$. よって, 像は $\boxed{\text{点}(4, 5, 9)}$.

(2) 直線 l 上の点は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ と表される.

$$f_A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix}$$

であるから, 直線 l の像は $\boxed{\text{直線 } \frac{x-4}{9} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-9}{20}}$. (パラメータ表示してもよい.)

(3) 平面 α 上の点は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される. この点の像は

$$f_A \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

ここで, $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ であるから, 平面 α の像は平面 $(x-4) + (y-4) - (z-8) = 0$, すなわち $\boxed{\text{平面 } x + y - z = 0}$.

(4) \mathbb{R}^3 の像は $f_A(\mathbb{R}^3) = \text{Im } f_A = C(A)$. A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから, $f_A(\mathbb{R}^3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$. ここで, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ より, \mathbb{R}^3 の像は $\boxed{\text{平面 } x + y - z = 0}$.

5 (1) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ とおくと,

$$D(p(x)) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

$$(M \circ D)(p(x)) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} p(x) \in \text{Ker}(M \circ D) &\Leftrightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = c, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0 \quad (c \text{ は任意の実数}) \\ &\Leftrightarrow p(x) \in \langle 1 \rangle. \end{aligned}$$

よって, $\text{Ker}(M \circ D)$ の基底として $\boxed{(1)}$ を選ぶことができ, $\boxed{\dim \text{Ker}(M \circ D) = 1}$ となる.

(2) $\mathbb{R}[x]_3$ の 1 組の基底として, $(1, x, x^2, x^3)$ をとると,

$$\begin{aligned} \text{Im}(D \circ M) &= \langle (D \circ M)(1), (D \circ M)(x), (D \circ M)(x^2), (D \circ M)(x^3) \rangle \\ &= \left\langle 0, \frac{1}{2}, \frac{2x}{3}, \frac{3x^2}{4} \right\rangle = \langle 1, x, x^2 \rangle = \mathbb{R}[x]_2. \end{aligned}$$

よって, $\text{Im}(D \circ M)$ の基底として $\boxed{(1, x, x^2)}$ を取ることができ, $\boxed{\dim \text{Im}(D \circ M) = 3}$ となる.

レポート問題

I $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3×2 行列 A を求める. 与えられた条件より,

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

であるから, このような行列 A は $A \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ を満たす. よって,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

A は 3×2 行列なので $\text{rank } A \leq 2$ となり, f は 全射でない. さらに,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので, $\text{rank } A = 2$ となり, f は 単射である.

II A に行基本変形を施すと,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.

(1) $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数) と表される.

よって, $\text{Ker } f_A$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が取れ, $\dim \text{Ker } f_A = 2$.

(2) A の簡約行列の主成分をもつ列が第 1 列, 第 3 列にある.

よって, $\text{Im } f_A$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ が取れ, $\dim \text{Im } f_A = 2$.