数学演習第二（演習 第10回）

微積：重積分 [1]（重積分の定義，累次積分）の解答例

2025年12月24日 実施分

【授業中の演習問題の解答例】

1

(1) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 2x\} \cup \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 3/2,\ x \leqq y \leqq 3-x\}$ より

$$\begin{aligned}\iint_D (2x-y)\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_x^{2x} (2x-y)\,dy + \int_1^{3/2} dx \int_x^{3-x} (2x-y)\,dy \\ &= \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=2x} dx + \int_1^{3/2} \left[2xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=3-x} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^{3/2} \left(-4x^2 + 9x - \frac{9}{2}\right) dx = \frac{1}{6} + \frac{5}{24} = \boxed{\frac{3}{8}}.\end{aligned}$$

(2) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 2,\ y^2 \leqq x \leqq 6-y\}$ より

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^2 dy \int_{y^2}^{6-y} xy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_{x=y^2}^{x=6-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \{(6-y)^2 y - y^5\}\,dy = \boxed{\frac{50}{3}}.$$

(3) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi - x\}$ より

$$\begin{aligned}\iint_D x\,\sin(x+y)\,dxdy &= \int_0^\pi dx \int_0^{\pi-x} x\,\sin(x+y)\,dy = \int_0^\pi [-x\,\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\pi-x}\,dx \\ &= \left[x\,\sin x + \cos x + \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \boxed{\frac{\pi^2}{2} - 2}.\end{aligned}$$

(4) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 4,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$ より

$$\iint_D x\,e^y\,dxdy = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} x\,e^y\,dx = \frac{1}{2}\left(\Big[y\,e^y\Big]_0^4 - \Big[e^y\Big]_0^4\right) = \boxed{\frac{3e^4+1}{2}}.$$

(5) $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2/x\}$ より

$$\begin{aligned}\iint_D y\,\log_e x\,dxdy &= \int_1^2 dx \int_0^{2/x} y\log x\,dy = \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2}\log x\right]_{y=0}^{y=2/x} dx = 2\int_1^2 \frac{\log x}{x^2}\,dx \\ &= 2\left(\left[-\frac{\log x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2}\right) = 2\left(-\frac{\log 2}{2} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2\right) = \boxed{1 - \log 2}.\end{aligned}$$

(6) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2\}$ より

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x+y+1}} = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{dy}{\sqrt{x+y+1}} = \int_0^1 \left[2\sqrt{x+y+1}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = 2\int_0^1 (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x+1})\,dx.$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}}\,dx = \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{x^2 + \tfrac{3}{4}}\,dx$ であり，$A > 0$ (定数) として，

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \left(\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}\right) dx \text{ より}$$

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left(x + \sqrt{x^2+A}\right)\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x+y+1}} &= \left[x\sqrt{x^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}\log\left(x + \sqrt{x^2+\frac{3}{4}}\right)\right]_{1/2}^{3/2} - \left[\frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \boxed{\frac{5}{6} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}\log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)}.\end{aligned}$$

【別法】$\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$ の計算に $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\,\mathrm{Sinh}^{-1}\frac{x}{a}\right)$ ($a > 0$: 定数) を利用してもよい．
ただし，$\mathrm{Sinh}^{-1} x$ は $\sinh x$ の逆関数を表す: $\mathrm{Sinh}^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$．

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$ レポート課題

(1) $x-1 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ から，$-1 \leqq y \leqq 1$ がわかり，$y \leqq 0$ のとき $0 \leqq x \leqq y+1$，$y \geqq 0$ のとき $0 \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}$ をみたす．よって，$\boxed{I = \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{y+1} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx}$．

(2) D は $D_1 = \Big\{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq \pi/2,\, 0 \leqq x \leqq \cos y\Big\}, D_2 = \Big\{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq \pi/2,\, \cos y \leqq x \leqq 1\Big\}$ に分割される．それぞれの領域での積分を J_1, J_2 とおくと $J = J_1 + J_2$ であり，$\cos^2 y = \dfrac{1+\cos 2y}{2}$ に注意して，

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}\iint_{D_1} (x + \cos y + |x-\cos y|)\,dxdy = \iint_{D_1} \cos y\,dxdy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy = \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1 \\
J_2 &= \frac{1}{2}\iint_{D_2} (x + \cos y + |x-\cos y|)\,dxdy = \iint_{D_2} x\,dxdy = \int_0^1 x\,dx \int_{\cos y}^1 dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \big(1-\cos^2 y\big)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2y}{2}\,dy = \frac{1}{4}\Big[y - \frac{\sin 2y}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

より，$J = \boxed{1+\dfrac{\pi}{8}}$．

また，J_2 の計算は $D_2 = \Big\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\, 0 \leqq y \leqq \mathrm{Cos}^{-1}\,x\Big\}$ と見て，次のように計算してもよい．

$$J_2 = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\mathrm{Cos}^{-1} x} dy = \int_0^1 x\ \mathrm{Cos}^{-1}\,x\,dx = \Big[\frac{1-x^2}{-2}\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

(3) 平面 $z = t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ で V を切ったときの断面は，xy 平面上で，放物線 $y = x^2 + t^2$ の上側と直線 $y = 2t$ の下側との共通部分である．ここで，$x^2 + t^2 \leqq 2t$ より，$|x| \leqq \sqrt{2t-t^2}$ を動く．よって，求める断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \int_{-\sqrt{2t-t^2}}^{\sqrt{2t-t^2}} \Big\{2t - (x^2+t^2)\Big\}\,dx = 2\Big[(2t-t^2)x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{2t-t^2}} = \boxed{\frac{4}{3}(2t-t^2)\sqrt{2t-t^2}}$$

(4) t は $0 \leqq t \leqq 2$ を動くので，$2t - t^2 = 1-(t-1)^2$ に注意し，$t = 1 + \sin u$ $(|u| \leqq \pi/2)$ とおくと，V の体積は

$$\int_0^2 S(t)\,dt = \frac{4}{3}\int_0^2 \Big\{(2t-t^2)\sqrt{2t-t^2}\Big\}\,dt = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4 u\,du = \frac{8}{3}\,\frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

【自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$ 2 重積分の値を求める問題

(1) (i) y に関して単純な領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\, y \leqq x \leqq 2y\}$ とみなす場合．

$$\iint_D x^2 y\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^2 y\,dx = \int_0^1 y\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=y}^{x=2y} dy = \int_0^1 \frac{7}{3}y^4\,dy = \frac{7}{3}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \boxed{\frac{7}{15}}.$$

(ii) x に関して単純な領域とみなす場合．この場合，D は次の D_1 と D_2 に分割される．

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\, \frac{1}{2}x \leqq y \leqq x\}, \quad D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\, \frac{1}{2}x \leqq y \leqq 1\}.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \iint_D x^2 y\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{x} x^2 y\,dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{1} x^2 y\,dy \\
&= \int_0^1 x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=x} dx + \int_1^2 x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^4\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx = \left[\frac{3}{40}x^5\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5\right]_1^2 = \boxed{\frac{7}{15}}.
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \underbrace{\int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,dy}_{\text{半径 } x \text{ の円の面積の } 1/4} = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{4}\,dx = \left[\frac{\pi x^3}{12}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{12}}$. 円の面積で計算した部分は

$\displaystyle\int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{x^2-y^2} + x^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{\pi x^2}{4}$ $(x>0)$ と計算することもできる.

(3) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}\}$ と表せる (原点中心, 半径 a の円の右半分).

$$\iint_D \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dxdy = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dy = \int_0^a 2\left[\frac{xy^3}{3\sqrt{a^2-x^2}}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx$$
$$= \int_0^a \frac{2}{3}x(a^2-x^2)\,dx = \left[\frac{1}{3}a^2x^2 - \frac{1}{6}x^4\right]_0^a = \boxed{\frac{a^4}{6}}.$$

【別法】累次積分の順序を交換すると, $\displaystyle(\text{与式}) = \int_{-a}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$

$\displaystyle\int_{-a}^a \left[-y^2\sqrt{a^2-x^2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{a^2-y^2}} dy = \int_{-a}^a \underbrace{y^2(a-|y|)}_{\text{偶関数}}\,dy = 2\int_0^a y^2(a-y)\,dy = 2\left[\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^a = \boxed{\frac{a^4}{6}}$.

(4) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} - x\}$ として,

$$\iint_D \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right) dx = [x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}.$$

(5) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 4,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq 2\}$ として,

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 (x+y)\,dy = \int_0^4 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=2} dx$$
$$= \int_0^4 \left(2x + 2 - x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) dx$$
$$= \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x + 2 - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \boxed{\frac{36}{5}}.$$

(6) D は中心 $(1/2, 0)$, 半径 $1/2$ の円であり, $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ -\sqrt{x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{x-x^2}\}$ と表せる.

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\,dy = \int_0^1 \sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 2x\sqrt{1-x}\,dx$$
$$= \int_1^0 2(1-t^2)t\cdot(-2t)\,dt = 4\int_0^1 (t^2 - t^4)\,dt = \boxed{\frac{8}{15}}. \qquad (t = \sqrt{1-x} \text{ で置換した})$$

置換せずに, $x\sqrt{1-x} = \{1-(1-x)\}\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} - (1-x)^{3/2}$ と変形してもよい.

$\boxed{4}$ 累次積分の積分順序を交換する問題

(1) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 2-x\}$ とおくと $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$ となる. D を y に関して単純な領域とみなすと, 次の D_1 と D_2 に分割される.

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}\},\quad D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq 2-y\}.$$

$$\therefore\ \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$
$$= \boxed{\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx}.$$

(2) $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ x^2 \leqq y \leqq x^3\}$ とおくと, $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dy$ となる.

この累次積分の積分順序を交換するとは，x に関して単純な領域 D を y に関して単純な領域（の幾つかの和集合）として表すことで，$x^2 \leqq y \leqq x^3$ **を x について解くこと**である．そこで，$x>0, y>0$ より，$x^2 \leqq y$ と $x \leqq \sqrt{y}$ は同値で，$y \leqq x^3$ と $\sqrt[3]{y} \leqq x$ も同値である．つまり，$x^2 \leqq y \leqq x^3$ は $\sqrt[3]{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}$ と同値である．また，$1 \leqq y \leqq 8$ から，$1 \leqq \sqrt[3]{y}$ なので，$D=\{(x,y) \mid 1 \leqq y \leqq 8,\ \sqrt[3]{y} \leqq x \leqq \min\{\sqrt{y},2\}\}$ がわかる．ここで，$\sqrt{y} \leqq 2$ と $(1 \leqq)\ y \leqq 4$ は同値であるから，D を y に関して単純な領域とみなすと，次の D_1 と D_2 に分割される．

$$D_1=\{(x,y) \mid 1 \leqq y \leqq 4,\ \sqrt[3]{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}\}, \quad D_2=\{(x,y) \mid 4 \leqq y \leqq 8,\ \sqrt[3]{y} \leqq x \leqq 2\}$$

つまり，$D=D_1 \cup D_2$ と表される．よって，

$$\int_1^2 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dy = \boxed{\int_1^4 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_4^8 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)\,dx}.$$

(3) $D=\{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq \pi,\ 0 \leqq x \leqq 1+\cos y\}$ とおくと，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^\pi dy \int_0^{1+\cos y} f(x,y)\,dx$ となる．x に関して単純な領域とみなすと $D=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \mathrm{Cos}^{-1}(x-1)\}$ なので，

$$\int_0^\pi dy \int_0^{1+\cos y} f(x,y)\,dx = \boxed{\int_0^2 dx \int_0^{\mathrm{Cos}^{-1}(x-1)} f(x,y)\,dy}.$$

5 2 重積分の値を求める問題

(1) $$\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

(2) $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$ が初等関数でないので，$\displaystyle\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ は計算できないため，積分順序を交換する．

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2}\,dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2}\,dy = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}(e-1)}.$$

6 空間図形の体積を求める問題

(1)

切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x=t$	$0 \leqq t \leqq 1$	$\lvert y\rvert \leqq \sqrt{1-t^2},\ 0 \leqq z \leqq y^2$	$\frac{2}{3}(1-t^2)^{3/2}$
平面 $y=t$	$-1 \leqq t \leqq 1$	$0 \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2},\ 0 \leqq z \leqq t^2$	$t^2\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$0 \leqq t \leqq 1$	$x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ \lvert y\rvert \geqq \sqrt{t}$	$\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{t}-\sqrt{t(1-t)}$

$$v(V_1) = \int_0^1 \frac{2}{3}(1-t^2)^{3/2}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \cdot \cos\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{8}}.$$

$$v(V_1) = \int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta \cdot \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\,d\theta = \boxed{\frac{\pi}{8}}.$$

(2)

切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x=t$	$-1 \leqq t \leqq 1$	$y^2+z^2 \leqq 1,\ \lvert z\rvert \leqq \sqrt{1-t^2}$	$2\,\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert+2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $y=t$	$-1 \leqq t \leqq 1$	$x^2+z^2 \leqq 1,\ \lvert z\rvert \leqq \sqrt{1-t^2}$	$2\,\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert+2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$-1 \leqq t \leqq 1$	$\lvert x\rvert \leqq \sqrt{1-t^2},\ \lvert y\rvert \leqq \sqrt{1-t^2}$	$4(1-t^2)$

$$v(V_2) = \int_{-1}^1 4(1-t^2)\,dt = 4 \cdot 2\int_0^1 (1-t^2)\,dt = 8\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \boxed{\frac{16}{3}}.$$