

数学演習第二 (演習第 11 回)

線形：線形写像の表現行列，基底変換行列，表現行列と座標

2026 年 1 月 7 日

【要点】

〈線形写像の表現行列〉

V, W をベクトル空間， $f: V \rightarrow W$ を線形写像とし， V の基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と W の基底 $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ が与えられているとする．このとき， \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の像 $f(\mathbf{a}_i)$ は $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ の 1 次結合として

$$f(\mathbf{a}_i) = a_{1i}\mathbf{b}_1 + \dots + a_{mi}\mathbf{b}_m = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

のように表される．この n 個の式をまとめて書くと

$$(f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_n)) = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

この右辺の $m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ を \mathcal{A}, \mathcal{B} に関する f の表現行列という．

例 \mathbb{R}^3 の基底として $\mathcal{E}_3 = \left(\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ を， \mathbb{R}^2 の基底として

$\mathcal{E}_2 = \left(\mathbf{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ を考える．(これらは $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ の標準基底とよばれる.)

このとき， $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{bmatrix}$ で定まる線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考えると，

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

であるから，まとめて書くと $(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ．よって， $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$ に関

する f の表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ である．

〈表現行列と座標〉

$f: V \rightarrow W$ を線形写像とし、 V, W の基底 \mathcal{A}, \mathcal{B} に関する f の表現行列を A とする。このとき、 $\mathbf{a} \in V$ の \mathcal{A} に関する座標を $[\mathbf{a}]_{\mathcal{A}}$ 、またその像 $f(\mathbf{a}) \in W$ の \mathcal{B} に関する座標を $[f(\mathbf{a})]_{\mathcal{B}}$ とすると、

$$[f(\mathbf{a})]_{\mathcal{B}} = A[\mathbf{a}]_{\mathcal{A}}$$

が成り立つ。

($\dim V = n, \dim W = m$ とすると、 $[\mathbf{a}]_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^n, [f(\mathbf{a})]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^m$ で、 A は $m \times n$ 行列。)

〈基底変換行列〉

ベクトル空間 V の 2 つの基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), \mathcal{A}' = (\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n)$ に対して、 \mathbf{a}'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の 1 次結合として

$$\mathbf{a}'_i = p_{1i}\mathbf{a}_1 + \dots + p_{ni}\mathbf{a}_n = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

のように表される。この n 個の式をまとめて書くと

$$(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

この右辺の $n \times n$ 行列 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ を \mathcal{A} から \mathcal{A}' への基底変換行列という。

このとき、 $\mathbf{a} \in V$ の $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ に関する座標をそれぞれ $[\mathbf{a}]_{\mathcal{A}}, [\mathbf{a}]_{\mathcal{A}'}$ とすると、

$$[\mathbf{a}]_{\mathcal{A}} = P[\mathbf{a}]_{\mathcal{A}'}$$

が成り立つ。

また、 P は正則行列で、 \mathcal{A}' から \mathcal{A} への基底変換行列は P^{-1} である。

〈基底の変換と表現行列〉

- $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を V の基底とし、 \mathcal{A} から \mathcal{A}' への基底変換行列を P とする。
- $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を W の基底とし、 \mathcal{B} から \mathcal{B}' への基底変換行列を Q とする。
- $f: V \rightarrow W$ を線形写像とし、 \mathcal{A}, \mathcal{B} に関する f の表現行列を A とする。

このとき、 $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ に関する f の表現行列を A' とすると、

$$A' = Q^{-1}AP$$

が成り立つ。

演習問題

1

(1) 次で与えられる \mathbb{R}^2 の2つの基底 \mathcal{A}, \mathcal{B} について, \mathcal{A} から \mathcal{B} への基底変換行列を求めよ.

$$\mathcal{A} = \left(\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

(2) \mathbb{R}^3 の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$ の2つの基底を考える.

$$\mathcal{A} = \left(\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

(i) \mathcal{A} から \mathcal{B} への基底変換行列を求めよ.

(ii) $\mathbf{x} \in W$ の \mathcal{B} に関する座標 $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ が $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ のとき, \mathcal{A} に関する座標 $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$ を a, b で表せ.

2 次で与えられる \mathbb{R}^3 のベクトルを考える.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(1) \mathbb{R}^3 の基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ に関する, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ の座標をそれぞれ求めよ.

(2) 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次で定義する.

$$f(\mathbf{a}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

\mathbb{R}^2 の基底 $\mathcal{F} = \left(\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ を考え, \mathcal{F} に関する, $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3)$ の座標を求めることにより, \mathcal{A}, \mathcal{F} に関する f の表現行列 A を求めよ.

(3) \mathbb{R}^3 の基底 $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ について, \mathcal{B}, \mathcal{F} に関する f の表現行列 B を求めよ.

(4) 線形写像 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$g \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -x - 2y \\ -4x - 4y \\ 5x + 12y \end{bmatrix}$$

で定義する. \mathcal{F}, \mathcal{A} に関する g の表現行列 M を求めよ.

3 ベクトル空間 V の基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ とベクトル空間 W の基底 $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ に対し、線形写像 $f: V \rightarrow W$ を

$$f(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4, \quad f(\mathbf{a}_2) = 3\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_3 - 3\mathbf{b}_4, \quad f(\mathbf{a}_3) = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_4,$$

で定義する。

- (1) \mathcal{A}, \mathcal{B} に関する f の表現行列 A を求めよ。
- (2) A を用いて、 $\text{Ker } f$ の次元と基底を一組求めよ。また、 $\text{Im } f$ の次元と基底を一組求めよ。

4 2次以下の実数係数1変数多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ とかく。線形変換 $D: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ を次で定義する。

$$D(p(x)) = 2p(x) - (x+1)p'(x) \quad (p(x) \in \mathbb{R}[x]_2)$$

- (1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ に関する D の表現行列 A を求めよ。
- (2) $\mathbb{R}[x]_2$ の別の基底 $\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, x^2)$ に関する D の表現行列を求めよ。

レポート課題

- 答だけでなく、計算の過程も書いて下さい (A4用紙1~2枚, pdfファイルで提出)
- 授業に出席し、レポートを授業翌日までに **WebClass** に提出して「出席」となります

0 $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく。

\mathbb{R}^3 の基底 $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, 標準基底 $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ および行列 M の定める \mathbb{R}^3 の線形変換 $f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) に関して、次の問いに答えよ。ただし、ベクトルや行列は成分表示すること。

- (1) ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ の基底 \mathcal{B} に関する座標が $[\mathbf{a}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_1$ であるとき、 \mathbf{a} ($= [\mathbf{a}]_{\mathcal{E}}$) を求めよ。
- (2) 基底 \mathcal{B} から \mathcal{E} への基底変換行列を求めよ。
- (3) 線形変換 f の基底 \mathcal{B} に関する表現行列を求めよ。