数学演習第二 (第11回) 【解答例】

線形：線形写像の表現行列，基底変換行列，表現行列と座標　2026 年 1 月 7 日 実施分

演習問題

$\boxed{1}$ (1) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]P$ となる $P = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]^{-1}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(2)(i) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]P$ となる P を求めるには，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ なる c_1, c_2 を求めればよい．言い換えると，$P = [[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}]$ である．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2|\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \to$ $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とわかるから，$P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(ii) 座標の間の関係は，$P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}}$ であることに注意すれば，$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3a + 2b \\ -a + b \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ まず逆行列を準備しておく．

$$M_1 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3], \quad M_1^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2], \quad M_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) $M_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を解けばよい．$M_1^{-1}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ の各列ベクトルが $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の $\mathcal{A}$ に関する座標なので，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(2) $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標を求めるには，$M_2\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{a}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ を解けばよい．$M_2^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ であり，この各列が $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標を与えるので，$\mathcal{A}, \mathcal{F}$ に関する表現行列は $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) (1) より $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ だから，

$[f(\boldsymbol{b}_1), f(\boldsymbol{b}_2), f(\boldsymbol{b}_3)] = [f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)]\begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{(2)}{=} [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $= [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}$. よって，求める表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}$.

別法: f の線形性と (1) から，$f(\boldsymbol{b}_1)=f(\boldsymbol{a}_2)-f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{b}_2)=7f(\boldsymbol{a}_1)-3f(\boldsymbol{a}_2)=\begin{bmatrix}26\\-4\end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{b}_3)=2f(\boldsymbol{a}_1)-3f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$. これらの $\mathcal{F}$ に関する座標は，$M_2^{-1}\begin{bmatrix}2&26&7\\0&-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&11&4\\1&15&3\end{bmatrix}$ の各列ベクトルになる．よって求める表現行列は，$\begin{bmatrix}1&11&4\\1&15&3\end{bmatrix}$.

(4) $g(\boldsymbol{v}_1)=\begin{bmatrix}-3\\-8\\17\end{bmatrix}$, $g(\boldsymbol{v}_2)=\begin{bmatrix}1\\0\\-7\end{bmatrix}$. それぞれの $\mathcal{A}$ に関する座標を求めるには，$M_1\boldsymbol{x}=g(\boldsymbol{v}_i)$ $(i=1,2)$ を解けばよい．$M_1^{-1}\begin{bmatrix}-3&1\\-8&0\\17&-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3\\-8&2\\2&0\end{bmatrix}$ の各列が $\mathcal{A}$ に関する座標を与えるので，求める表現行列 $M=\begin{bmatrix}7&-3\\-8&2\\2&0\end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$ (1) 表現行列の定義から，$A=\begin{bmatrix}-1&3&-2\\0&0&1\\-1&3&-2\\1&-3&2\end{bmatrix}$ である．(2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ となるので，$\dim N(A)=1$ で基底の一例として $\left(\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ が取れる．$\dim C(A)=2$ で基底の一例として $\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\\2\end{bmatrix}\right)$ が取れる．これを V,W の元として書けば，$\dim\operatorname{Ker} f=1$ で基底として $(3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)$ が取れ，$\dim\operatorname{Im} f=2$ で基底として $(-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_4, -2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{b}_3+2\boldsymbol{b}_4)$ が取れる.（なお，$\operatorname{Im} f$ の基底はもう少し簡単に $(-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_2)$ とも取れる.）

$\boxed{4}$ (1) $D(1)=2, D(x)=x-1, D(x^2)=-2x$ より，表現行列は $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(2) $D(1+x)=1+x, D(x+x^2)=-(1+x), D(x^2)=-2(x+x^2)+2x^2$ より，$\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&-2\\0&0&2\end{bmatrix}$.

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ を用いて，$P^{-1}AP$ と求めてもよい.

$\boxed{\text{レポート問題}}$

$\boxed{0}$

(1) 座標の定義により, $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{b}_1 = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}$.

(2) 求める基底変換行列を P とすれば, 定義より $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)P = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. ここで, $B = [\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \boldsymbol{b}_3]$ ($\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を横に並べた行列) と定めれば, $BP = E$ であるから, $P = U^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
[B \ \ E] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [E \ \ B^{-1}]
\end{aligned}
$$

より, $P = B^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$.

(3) 求める表現行列を N とすれば, 定義より $(f(\boldsymbol{b}_1), f(\boldsymbol{b}_2), f(\boldsymbol{b}_3)) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)N$. ここで, $f(\boldsymbol{b}_i) = M\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ であるから, 上の関係式は

$$
MU = [M\boldsymbol{b}_1 \ \ M\boldsymbol{b}_2 \ \ M\boldsymbol{b}_3] = [\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \boldsymbol{b}_3]N = BN
$$

と書かれる. よって,

$$
\begin{aligned}
N = B^{-1}MB &= B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}.
\end{aligned}
$$