# 数学演習第二（演習第 13 回）【解答例】

**線形： 行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化**　　2026 年 1 月 21 日

## 【授業中の演習問題の解答例】

**1**

(a) について

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4\\ 1 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-2=(\lambda+2)(\lambda-1)$. $A$ の固有値は $\lambda=-2,1$.

(2) $\underline{\lambda=-2\text{ に対して}}$: $-2E-A=\begin{bmatrix}-4 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(-2E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数)．よって，$V_{-2}$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda=1\text{ に対して}}$: $E-A=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-4\\ 1\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数)．よって，$V_1$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}-4\\ 1\end{bmatrix}\right)$.

(3) $P=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

(b) について

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & 4 & -4\\ -2 & \lambda-6 & 4\\ -1 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda & 4 & -4\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4 & 4 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$. $A$ の固有値は $\lambda=2$.

(2) $\underline{\lambda=2\text{ に対して}}$: $2E-A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\\ -1 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より, $(2E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ ($s,t$ は任意定数). よって, $V_2$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right)$.

(3) $\dim V_2=2<3=\dim\mathbb{R}^3$ であるから, (b) の $A$ は対角化可能でない.

(c) について

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 2\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ -2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ \lambda-1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & \lambda-4 & -3\\ 0 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. $A$ の固有値は $\lambda=1,2$.

(2) $\underline{\lambda=1\text{ に対して}}$: $E-A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ ($s,t$ は任意定数)．よって，$V_1$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda=2\text{ に対して}}$: $2E-A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(2E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数)．よって，$V_2$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\right)$

(3) $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ とおけば，命題 13.6 (ii) から, 基本解は 1 次独立なので, $P$ は正則で, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

**2**

$[P,E_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$ より，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$ なので,

$$A^n=P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2^{n+1} & 2-2^{n+1} & 2-2^{n+1}\\ 1-2^n & 2^n & -1+2^n\\ -2+2^{n+1} & 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1}\end{bmatrix}.$$

**注**: $n=0$ のとき，$P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^0\end{bmatrix}P^{-1}=PP^{-1}=E$ なので，$A^0=E$ と定義すれば，上の計算結果は $n=0$ のときも成立する．得られた結果に $n=0,1$ を代入して，それぞれ $E, A$ に一致することをチェックすると検算になる．

## 【レポート課題の解答例】

**3** (1) $A$ の固有値を求めればよい．$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&2\\2&\lambda+4&-4\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&\lambda+2\\2&\lambda+4&-4\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&\lambda+2&-2\lambda-4\\1&1&\lambda\end{vmatrix}$
$=(\lambda+2)^2\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda+1)$. よって，$f$ の固有値は $\lambda=-2,-1$.

(2) $2E+A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\-2&-2&4\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ から，$(2E+A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ ($s,t$ は任意定数)．$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ なので，よって $V_{-2}$ の基底は，$\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$．$E+A=\begin{bmatrix}0&1&-2\\-2&-3&4\\-1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$ から，$(E+A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数)．よって $V_{-1}$ の基底は，$\left(\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\right)$．特に $\dim(V_{-2}+V_{-1})=3$ より，$V_{-2}+V_{-1}=\mathbb{R}^3$ である．また，$V_{-2}\cap V_{-1}=\{\mathbf{0}\}$ から，命題 19.12 により，$\mathbb{R}^3=V_{-2}\oplus V_{-1}$ がわかる．

(3) $P=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{y}(t)=P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ ($\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}(t)=P\boldsymbol{y}(t)$) とおくと，$P$ は定数行列なので，方程式 $\boldsymbol{x}'(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ は方程式 $\boldsymbol{y}'(t)=P^{-1}AP\,\boldsymbol{y}(t)$ に変換され，$P^{-1}AP$ は対角行列のため，単独の斉次線形微分方程式 $y_1'(t)=-y_1(t)$, $y_j'(t)=-2\,y_j(t)$ $(j=2,3)$ に帰着されるから，$y_1$, $y_2$, $y_3$ は独立に解ける．つまり，例 25.4 や理数基礎科目『解析学』で学んだように，一般解 $y_1(t)=C_1\,e^{-t}$, $y_j(t)=C_j\,e^{-2t}$ $(j=2,3)$ を得る．但し，$C_1$, $C_2$, $C_3$ は任意の定数を表す．よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x}(t)=P\,\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\,e^{-t}\\C_2\,e^{-2t}\\C_3\,e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-C_1\,e^{-t}+(-C_2+2C_3)\,e^{-2t}\\2C_1\,e^{-t}+C_2\,e^{-2t}\\C_1\,e^{-t}+C_3\,e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

なお，$A$ が対角化可能でない場合には，固有空間に属さない列ベクトルを結合させて，$P^{-1}AP$ が三角行列となるように正則行列 $P$ を構成し，$\boldsymbol{y}'(t)=P^{-1}AP\,\boldsymbol{y}(t)$ を解く．その詳細は 2023 年度の第 13 回解答例を参照せよ．

## 【それ以外の自習用問題の解答例】

**4** (a) について

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-8&9\\-6&\lambda+7\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)$. $A$ の固有値は $\lambda=-1,2$.

(2) <u>$\lambda=-1$ に対して</u>: $-E-A=\begin{bmatrix}-9&9\\-6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ より，$(-E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数). よって，$V_{-1}$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$. <u>$\lambda=2$ に対して</u>: $2E-A=\begin{bmatrix}-6&9\\-6&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3/2\\0&0\end{bmatrix}$ より，$(2E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数). よって，$V_2$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)$.

(3) $P=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$.

(b) について

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4&1&-5\\-1&\lambda-2&-3\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. $A$ の固有値は $\lambda=1,2,3$.

(2) <u>$\lambda=1$ に対して</u>: $E-A=\begin{bmatrix}-3&1&-5\\-1&-1&-3\\1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ より，$(E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は

$\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数). よって, $V_1$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda = 2 \text{ に対して}}$: $2E-A = \begin{bmatrix}-2 & 1 & -5\\-1 & 0 & -3\\1 & -1 & 2\end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & -1 & -1\\0 & -1 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より, $(2E-A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数). よって, $V_2$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda = 3 \text{ に対して}}$: $3E-A = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -5\\-1 & 1 & -3\\1 & -1 & 3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より, $(3E-A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ ($s$ は任意定数). よって, $V_3$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\-1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

(c) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -1\\4 & \lambda-5 & -2\\-4 & 4 & \lambda+1\end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3$. $A$ の固有値は $\lambda = 1$.

(2) $\underline{\lambda = 1 \text{ に対して}}$: $E-A = \begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\4 & -4 & -2\\-4 & 4 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & -1/2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より, $(E-A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ ($s, t$ は任意定数). よって, $V_1$ の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right)$.

(3) $\dim V_1 = 2 < 3$ であるから, (c) の $A$ は対角化可能でない.

**5** $\lambda = 0$ のとき, 線形教科書の定理 11.3 から, $|BA| = |AB| = 0$ なので, 0 も $BA$ の固有値である. $\lambda \neq 0$ のとき, $AB$ の固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルの 1 つを $\boldsymbol{x}$ とすると, $AB\,\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたすが, $\lambda \neq 0$ より, $\lambda\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ のため, $AB\,\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ である. 特に, $B\,\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ で, $BA(B\,\boldsymbol{x}) = B(AB\,\boldsymbol{x}) = B(\lambda\,\boldsymbol{x}) = \lambda(B\,\boldsymbol{x})$ が成り立つ. $\lambda \neq 0$ のときも, $\lambda$ は $BA$ の固有値である.

【参考】一般に, 同じサイズの正方行列 $A, B$ に対して, 等式 $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が成り立つ. これを示しておこう.

《方法 1》$A, B$ を $n$ 次正方行列とすると,

$$\begin{bmatrix}E_n & -A\\O & \lambda E_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda E_n & A\\B & E_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda E_n - AB & O\\\lambda B & \lambda E_n\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}E_n & O\\-B & \lambda E_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda E_n & A\\B & E_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda E_n & A\\O & \lambda E_n - BA\end{bmatrix}.$$

ここで, $\begin{vmatrix}E_n & -A\\O & \lambda E_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}E_n & O\\-B & \lambda E_n\end{vmatrix} = \lambda^n$ であるから, 上の 2 式について, それぞれ両辺の行列式をとることにより,

$$\lambda^n\begin{vmatrix}\lambda E_n & A\\B & E_n\end{vmatrix} = \lambda^n|\lambda E_n - AB| = \lambda^n|\lambda E_n - BA|.$$

を得る. よって, $\underline{\lambda \text{ の多項式 (整式) として}}$, $|\lambda E_n - AB| = |\lambda E_n - BA|$, すなわち $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が成り立つ.

《方法 2》$A$ が正則のとき, $A^{-1}(\lambda E - AB) = \lambda A^{-1} - B = (\lambda E - BA)A^{-1}$ より, $|\lambda E - AB| = |A||\lambda A^{-1} - B| = |\lambda E - BA|$. $A$ が正則でないとき, 正数 $\varepsilon_1$ を十分小さくとれば, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ に対して $A_\varepsilon := A + \varepsilon E$ は正則となる ($A$ の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすれば, $A_\varepsilon$ の固有値は $\lambda_1 + \varepsilon, \ldots, \lambda_n + \varepsilon$ となることに注意). このとき, $|\lambda E - A_\varepsilon B| = |\lambda E - BA_\varepsilon|$ が成り立つので, $\varepsilon \to +0$ とすることにより, $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$ を得る ($n$ 次正方行列 $M$ の行列式 $|M|$ は $M$ の各成分を変数とする $n^2$ 変数多項式, 従って各成分に関して連続であることに注意). よって, $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が示された.

《方法 3》$A$ の余因子行列を $\widetilde{A}$ とすれば, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E$ より, $\widetilde{A}(\lambda E - AB) = \lambda\widetilde{A} - |A|B = (\lambda E - BA)\widetilde{A}$. これより $|\widetilde{A}||\lambda E - AB| = |\lambda E - BA||\widetilde{A}|$. ここで, 両辺を $A$ の各成分を変数とする $n^2$ 変数多項式と見なして, 0 でない多項式 $|\widetilde{A}|$ で割ることにより $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$, すなわち $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ を得る.

《方法 4》$|B||\lambda E - AB| = |\lambda B - BAB| = |\lambda E - BA||B|$. 上と同様に, この等式を $B$ の成分を変数とする多項式に対する等式と見なして, 両辺を 0 でない多項式 $|B|$ で割ることにより $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$, 即ち $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ を得る.

**6** (1) $(A\boldsymbol{p}_1, \ldots, A\boldsymbol{p}_n) = (f(\boldsymbol{p}_1), \ldots, f(\boldsymbol{p}_n)) = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)D = (\mu_1\boldsymbol{p}_1, \ldots, \mu_n\boldsymbol{p}_n)$ (2 番目の等号で表現行列の定

義を用いた) より, $A\boldsymbol{p}_k=\mu_k\boldsymbol{p}_k$ $(1\leqq k\leqq n)$. $\boldsymbol{p}_k\neq\boldsymbol{0}$ であるから, $\mu_k$ は $A$ の固有値であり, $\boldsymbol{p}_k$ は $\mu_k$ に対する固有ベクトルである.

(2) (1) の結果から, $AP=A[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]=[\,A\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_n\,]=[\,\mu_1\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \mu_n\boldsymbol{p}_n\,]=[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]D=PD$. $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ が1次独立なので, $P=[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]$ は正則となる. よって, $AP=PD$ から $P^{-1}AP=D$ が従う.

(3) $A=PDP^{-1}$ と書けるから, $F_A(\lambda)=|\lambda E-A|=|P(\lambda E-D)P^{-1}|=|P|\begin{vmatrix}\lambda-\mu_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda-\mu_n\end{vmatrix}|P^{-1}|=(\lambda-\mu_1)\cdots(\lambda-\mu_n)$. ここで, $|P||P^{-1}|=|PP^{-1}|=|E_n|=1$ を用いた.

(4) $A=PDP^{-1}$ より $A\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}\ \Leftrightarrow\ (\mu E-D)P^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\mu-\mu_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \mu-\mu_n\end{bmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ であるから, $\mu$ は $\mu_1,\dots,\mu_n$ のいずれかと一致する. $\mu_k=\mu$ となる $k$ を $k_1,\dots,k_m$ ($m$ が固有値 $\mu$ の代数的重複度) とすれば, $\boldsymbol{x}\in V_\mu\ \Leftrightarrow\ P^{-1}\boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{e}_{k_1},\dots,\boldsymbol{e}_{k_m}\rangle\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{p}_{k_1},\dots,\boldsymbol{p}_{k_m}\rangle$. よって, $V_\mu=\langle\boldsymbol{p}_{k_1},\dots,\boldsymbol{p}_{k_m}\rangle$ となり, $\dim V_\mu=m$ が示された.

**7** (1) $P^{-1}AP=C$, $P^{-1}BP=D$ とおくと, $C$, $D$ は対角行列なので, $CD=DC$ が成り立つから

$$AB=(PCP^{-1})(PDP^{-1})=P(CD)P^{-1}=P(DC)P^{-1}=(PDP^{-1})(PCP^{-1})=BA.$$

(2) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ を $A$ の固有値とし, $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{p}_k\in V_{\lambda_k}$ $(k=1,\dots,n)$ とすると

$$A(B\boldsymbol{p}_k)=BA\boldsymbol{p}_k=B(\lambda_k\boldsymbol{p}_k)=\lambda_k(B\boldsymbol{p}_k)$$

より, $B\boldsymbol{p}_k\in V_{\lambda_k}$ を得る. また, 仮定から, $\dim V_{\lambda_k}=1$ なので, $B\boldsymbol{p}_k=\mu_k\boldsymbol{p}_k$ となる複素数 $\mu_k$ が存在する. よって, $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ は1次独立であるから, $P:=[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]$ は正則で, $C=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}\mu_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \mu_n\end{bmatrix}$ とおくと, $\boxed{6}$ (2) と同様に $AP=PC$, $BP=PD$ が成り立つので, $P^{-1}AP=C$, $P^{-1}BP=D$ をみたす.

**8** (1) $p=2\alpha, q=-\alpha^2$ に注意する. $f(\boldsymbol{c}_1)=q\boldsymbol{c}_2$, $f(\boldsymbol{c}_2)=\boldsymbol{c}_1+p\boldsymbol{c}_2$, $F_A(\alpha)=0$ および $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2$ の1次独立性から,

$$f(\boldsymbol{c}_2)=(p-\alpha)\boldsymbol{c}_2+(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)=\alpha\boldsymbol{c}_2+(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2),\quad f(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)=\alpha\boldsymbol{c}_1+(p\alpha+q)\boldsymbol{c}_2=\alpha(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2).$$

(2) 簡単のため, $T=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{bmatrix}$ とおくと, $T^2=\begin{bmatrix}\alpha^2 & 0\\ 2\alpha & \alpha^2\end{bmatrix}$ である. ここで, $n\geqq 2$ に対して, $T^n=\begin{bmatrix}\alpha^n & 0\\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n\end{bmatrix}$ を $n$ に関する帰納法で示す. そこで, $n$ での成立を帰納法の仮定とすると

$$T^{n+1}=T^nT=\begin{bmatrix}\alpha^n & 0\\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^{n+1} & 0\\ (n+1)\alpha^n & \alpha^{n+1}\end{bmatrix}.$$

(3) (1) と (2) の結果より, $n\geqq 1$ に対して

$$(f^n(\boldsymbol{c}_2),f^n(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2))=(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)T^n=(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)\begin{bmatrix}\alpha^n & 0\\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n\end{bmatrix}$$

が成り立つ. 特に, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2$ の第 $n$ 項 $(\boldsymbol{c}_2)_n$, $(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)_n$ はそれぞれ

$$(\boldsymbol{c}_2)_n=(f^{n-1}(\boldsymbol{c}_2))_1=\alpha^{n-1}(\boldsymbol{c}_2)_1+(n-1)\alpha^{n-2}(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)_1=(n-1)\alpha^{n-2},$$
$$(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)_n=(f^{n-1}(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2))_1=\alpha^{n-1}(\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)_1=\alpha^{n-1}$$

で表される. また, 任意の $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3,\dots)\in W$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{c}_1+a_2\boldsymbol{c}_2=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2)\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}&=(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & \alpha\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}\\ &=(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)\begin{bmatrix}-\alpha & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1+\alpha\boldsymbol{c}_2)\begin{bmatrix}-\alpha a_1+a_2\\ a_1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

と書ける. よって, $n\geqq 1$ に対して, $\alpha=\dfrac{p}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned}a_n&=(a_2-\alpha a_1)(n-1)\alpha^{n-2}+a_1\alpha^{n-1}=(2-n)a_1\alpha^{n-1}+(n-1)a_2\alpha^{n-2}\\ &=\left\{\left(a_2-\frac{p}{2}a_1\right)n+(pa_1-a_2)\right\}\left(\frac{p}{2}\right)^{n-2}\end{aligned}$$