令和７年度 数学演習第二 期末統一試験　【解説】

2026 年 1 月 28 日 実施

$\boxed{1}$ (1) $0 = g(x,y) = x^2 - xy - y^2 + 5$ の両辺をそれぞれ x で微分すると
$0 = (2x - y) - (x + 2y)y'$ から，$\varphi'(x) = y' = \boxed{\dfrac{2x - y}{x + 2y}}$ を得る．
(2) $\varphi(x)$ が $x = a$ で極値をとれば，$\varphi'(a) = 0$ なので，(1) より $\varphi(a) = 2a$ をみたす．そのとき，$0 = g(a, \varphi(a)) = 5(1 - a^2)$ であるから，$a = 1$ または $a = -1$ を得る．$\varphi'(a) = 0$ をみたすとき

$$\varphi''(a) = -\frac{g_{xx}(a, 2a)}{g_y(a, 2a)} = -\frac{2}{-5a} = \frac{2}{5a}$$

が成り立つ．特に $\varphi''(\pm 1) = \pm\dfrac{2}{5}$（複号同順）から，$\varphi(x)$ は
$\boxed{x = -1 \text{ で極大値 } -2 \text{ をとり，} \quad x = 1 \text{ で極小値 } 2 \text{ をとる}}$．また，$\varphi''$ の公式を使わないなら

$$(*) \qquad 0 = \{(2x - y) - (x + 2y)y'\}' = 2 - 2y' - xy'' - 2(y')^2 - 2yy'' = 2 - (x + 2y)y''$$

(3) x, y, λ に関する連立方程式

$$\text{(i)} \qquad 0 = F_x(x, y, \lambda) = 1 + \lambda(-2x + y)$$

$$\text{(ii)} \qquad 0 = F_y(x, y, \lambda) = 1 + \lambda(x + 2y)$$

$$\text{(iii)} \qquad 0 = g(x, y) = x^2 - xy - y^2 + 5$$

を解く．まず，$\lambda \neq 0$ なので，(ii)-(i) より $0 = 3x + y$ をみたす．次に，$y = -3x$ を (iii) に代入して，$0 = 5(1 - x^2)$ から，$x = \pm 1$ を得て，$\boxed{(x, y) = (-1, 3), (1, -3)}$ がわかる．
【注意】 $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ は双曲線で非有界なので，この時点で $f(x, y)$ が点 $(-1, 3)$, $(1, -3)$ において極値をとるかどうかはわからない．
(4) (3) の結果と $g_y(-1, 3) = -5 \neq 0$, $g_y(1, -3) = 5 \neq 0$ に注意すると，ラグランジュの未定乗数法が適用される．そこで，$h(x) = x + \varphi(x)$ とおくと，$h''(x) = \varphi''(x)$ なので，$\varphi''(\pm 1)$ の符号を調べればよい．ここで，$(*)$ から

$$0 = \frac{d^2}{dx^2} g(x, \varphi(x)) = 2 - 2\varphi'(1 + \varphi') - (x + 2\varphi)\varphi'' \qquad \therefore \varphi''(x) = \frac{2 - 2\varphi'(1 + \varphi')}{x + 2\varphi}$$

を得る．特に $\varphi'(\pm 1) = -1$ から，$h''(\pm 1) = \varphi''(\pm 1) = \pm\dfrac{2}{5}$（複号同順）なので，$f(x, y)$ $(= h(x))$ は $\boxed{\text{点 } (-1, 3) \text{ で極小値 } 2 \text{ をとり，点 } (1, -3) \text{ で極大値 } -2 \text{ をとる}}$．

$\boxed{2}$ (5) $0 \leqq y \leqq 2$, $y^2 \leqq x \leqq 6 - y$ より，$0 \leqq x \leqq 6$ で，$y \leqq \sqrt{x}$ かつ $y \leqq 6 - x$ から，$0 \leqq y \leqq \min\{6 - x, \sqrt{x}\}$ をみたす．ここで，$\sqrt{x} \gtreqless 6 - x \iff x \gtreqless (6 - x)^2 \iff x \gtreqless 4$ なので，積分領域は $0 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ と $4 \leqq x \leqq 6$, $0 \leqq y \leqq 6 - x$ に分割される．よって

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{6-y} f(x, y)\, dx = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy + \int_4^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y)\, dy$$

$\boxed{3}$ (6) $x = s - y = s(1 - t)$, $y = st$ より

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} 1 - t & t \\ -s & s \end{vmatrix} = (1 - t)s + ts = \boxed{s}$$

で，$0 \leqq s(1-t) = x \leqq y = st$ において，$s > 0$ に注意して，$0 \leqq 1-t \leqq t$ なので，$\boxed{\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1}$ を得る．よって，変数変換の公式から

$$I = \int_0^1 ds \int_{1/2}^1 s(1-t)st \cdot s\,dt = \int_0^1 s^3\,ds \int_{1/2}^1 (1-t)t\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \boxed{\frac{1}{48}}$$

【参考】 $D: 0 \leqq x \leqq 1/2,\ x \leqq y \leqq 1-x$ と看做すと

$$I = \int_0^{1/2} \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} (x - 2x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) = \boxed{\frac{1}{48}}$$

$\boxed{4}$ (7) $D: 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 2-x$ と看做すと

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} x\,dy = \int_0^1 (2x - x^2 - x^3)\,dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{12}}\end{aligned}$$

(8) $D: 0 \leqq y \leqq \pi/2,\ 0 \leqq x \leqq (\pi/2) - y$ と看做すと

$$\iint_D y\,\cos(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{(\pi/2)-y} y\,\cos(x+y)\,dx = \int_0^{\pi/2} [y\,\sin(x+y)]_{x=0}^{x=(\pi/2)-y}\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} (y - y\,\sin y)\,dy = \frac{\pi^2}{8} + [y\,\cos y]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy = \boxed{\frac{\pi^2}{8} - 1}$$

(9) $u = x + 2y,\ v = x - y$ とおくと，$x = \dfrac{u+2v}{3},\ y = \dfrac{u-v}{3}$ より，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\dfrac{1}{3}$ で，D は $E: 0 \leqq u \leqq 2,\ -1 \leqq v \leqq 1$ に対応する．よって，変数変換の公式から

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x+2y}{\sqrt{4-(x-y)^2}}\,dxdy &= \frac{1}{3}\int_0^2 u\,du \int_{-1}^1 \frac{dv}{\sqrt{4-v^2}} \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 \cdot 2\left[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{v}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{2\pi}{9}}\end{aligned}$$

(10) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta\ (r \geqq 0)$ とおくと，$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ より $0 \leqq r \leqq 1$ で，$0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ である．よって，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ も用いると

$$\iiint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+r^3} \cdot r^2\sin\theta\,dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \left[\frac{1}{3}\,\log(1+r^3)\right]_0^1 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\log 2}{3} = \boxed{\frac{4\pi\log 2}{3}}$$

$\boxed{5}$ (11)–(13) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とし，行列 $[A\ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & (-3x+2y)/7 \\ 0 & 1 & 3 & (2x-y)/7 \\ 0 & 0 & 0 & (-2x-13y+7z)/7 \end{bmatrix}$ であるから，$\dim(\mathrm{Im}\ f) = \dim C(A) = \boxed{2}$ で，$\mathrm{Ker}\ f$ の１組の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$ を得る．同

時に，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ f = C(A)$ であることは $-2x - 13y + 7z = 0$ と同値であるので，$\mathrm{Im}\ f = N(B)$ となる 1×3 行列 B の１つは $[2\ \ 13\ \ -7]$ で，その簡約行列 B_0 は $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}}$ である．ここで，$\mathrm{Im}\ f = N(C)$ となる任意の 1×3 行列 C の簡約行列は B_0 と一致することに注意する．

$\boxed{6}$ f, g の定義より，$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2\,x_3 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 - 4\,x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ である．

(14) 求める表現行列を F とすると，$f(\boldsymbol{x}) = F\,\boldsymbol{x}$ であるので，$F = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$.

(15) $g(\boldsymbol{a}_1) = 2\boldsymbol{a}_1,\ g(\boldsymbol{a}_2) = 2\boldsymbol{a}_2$ より，$\mathrm{Im}\ g = \langle g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2) \rangle = V$ で，$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ は１次独立であるから，$\dim(\mathrm{Im}\ g) = \boxed{2}$ である．
【別法】$\det F = 4 \neq 0$ なので，$g : V \to V$ は可逆で，$g(c_1\,\boldsymbol{a}_1 + c_2\,\boldsymbol{a}_2) = c_1\,g(\boldsymbol{a}_1) + c_2\,g(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{0}$ から，$c_1\,\boldsymbol{a}_1 + c_2\,\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ が導かれる．ここで，$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ は１次独立であるから，$g(\boldsymbol{a}_1),\ g(\boldsymbol{a}_2)$ も１次独立である．よって，$\dim(\mathrm{Im}\ g) = \boxed{2}$ である．この方法では $g(\boldsymbol{a}_1),\ g(\boldsymbol{a}_2)$ を計算する必要はないが，(17) の表現行列を求める上では欠かせない．
(16) 求める基底変換行列を P とすると，$[\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3]\,P = E_3$ より，

$P = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}$ を得る．

(17) 求める表現行列を Q とすると，$[g(\boldsymbol{a}_1)\ \ g(\boldsymbol{a}_2)] = [\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3]\,Q$ をみたす．よって，

$Q = P\,[g(\boldsymbol{a}_1)\ \ g(\boldsymbol{a}_2)] = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$ と計算される．

【別法】 $[g(\boldsymbol{a}_1)\ \ g(\boldsymbol{a}_2)] = [2\boldsymbol{a}_1\ \ 2\boldsymbol{a}_2] = [\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3]\,Q$ より，直ちに同じ Q が得られる．

$\boxed{7}$ (18)–(20) M の固有多項式 $F_M(\lambda)$ を因数分解すればよい．つまり，例えば

$$\det(\lambda\,E_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

と計算される．よって，M のすべての固有値は $\boxed{-1,\ 2}$ である．次に，$2E_3 - M$ の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，固有値 2 に対する M の固有空間 V_2 の１組の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ である．同様に，$-E_3 - M$ の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので，固有値 -1 に対する M の固有空間

V_{-1} の 1 組の基底は $\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ で，f の 2 次元固有空間は V_{-1} で，その 1 組の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)}$ である．更に，V_{-1} および V_2 の 1 組の基底をなすベクトルと結合させて，$P = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ とおくと，P は正則で，$P^{-1}MP = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ をみたす．このとき，$P^{-1}M^2P = (P^{-1}MP)^2 = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ が成り立つ．よって，$D = P^{-1}M^2P = \boxed{\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}$ である．他には，$D = \boxed{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}$ または $D = \boxed{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}}$ である．これら 3 つ以外の D は存在しない．この方法は任意の対角化可能な正方行列に対して有効である．では対角化可能でない正方行列についてはどう対処したらよいか．考察してみるのは興味深いであろう．

【別法】 (20) 既述のように，M^2 を計算する必要はないが，$M^2 = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ の固有多項式を因数分解してもよい．

$$\det(\lambda E_3 - M^2) = \begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\-1 & \lambda-2 & -1\\-1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4\\-1 & \lambda-2 & -1\\-1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & \lambda-2 & -1\\-1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & \lambda-1 & 0\\0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

から，M^2 のすべての固有値は 1, 4 である．こちらの方が直接的であるが，M^n のすべての固有値を求める場合には向かないであろう．次に，M^2 の対角化を求めるが，単なる固有ベクトルの計算を繰り返さず，向学のために，以下では M^2 の固有空間と M の固有空間との関係を調べよう．
3 次正方行列 S の固有値 λ に対する固有空間を $V_\lambda(S)$ で表すことにする．つまり，$V_\lambda(S) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid S\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}\}$ とする．前述のようにして，$V_1(M^2) = V_{-1}(M), V_4(M^2) = V_2(M)$ を計算で確かめることはできるが，次のようにして理論的に示すこともできる．このことにより，上述と同じ P を用いて，$P^{-1}M^2P = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ を直接導けることがわかる．

まず，自明な包含関係 $V_{-1}(M) \subset V_1(M^2)$ より，$\dim V_1(M^2) \geqq 2$ に注目しておく．実は $V_1(M^2) = V_{-1}(M)$ であることが以下のように導ける．もし $\dim V_1(M^2) = 3$ と仮定するとき，$V_1(M^2) = \mathbb{R}^3 \supset V_2(M)$ なので，$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V_2(M)$ をとると，$M^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ をみたす．一方，$M\,\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{v}$ より，$M^2\,\boldsymbol{v} = 4\,\boldsymbol{v}$ から，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ という矛盾が生じる．よって，$\dim V_1(M^2) = 2$

で，$V_1(M^2) = V_{-1}(M)$ を知る．また，$V_4(M^2) = V_2(M)$ を出すには，$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset V_4(M^2)$ に着目して，$\dim V_4(M^2) \geqq 1$ を用いればよい．実際，$\dim V_4(M^2) \geqq 2$ と仮定すると，$3 = \dim \mathbb{R}^3 \geqq \dim(V_1(M^2) + V_4(M^2)) = \dim V_1(M^2) + \dim V_4(M^2) \geqq 4$ という矛盾が生じる．よって，$\dim V_4(M^2) = 1$ で，$V_4(M^2) = V_2(M)$ がわかる．こうして，$V_1(M^2) = V_{-1}(M)$, $V_4(M^2) = V_2(M)$ が示される．