令和７年度 数学演習第二 期末統一試験【問題用紙】

2026 年 1 月 28 日実施・試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入すること —

1 2 変数関数 $g(x,y)=x^2-xy-y^2+5$ について考える．$g(x,y)=0$ で定義される陰関数を $y=\varphi(x)$ として，以下の設問に答えよ．

(1) $\varphi'(x)$ を x, y の有理式で表せ．

(2) $\varphi(x)$ の極値をすべて求め，解答欄には「$x=a$ で極大値（または極小値）b をとる」という形式で答えを記せ．

(3) $f(x,y)=x+y$, $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおくとき，ある実数 λ が存在して $F_x(x,y,\lambda)=0,\ \ F_y(x,y,\lambda)=0,\ \ g(x,y)=0$ が成り立つような (x,y) をすべて求めよ．

(4) 条件 $g(x,y)=0$ の下で，関数 $f(x,y)=x+y$ の極値をすべて求め，解答欄には「点 (c,d) で極大値（または極小値）m をとる」という形式で答えを記せ．

2 (5) 連続関数 $f(x,y)$ に対して，等式

$$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{6-y} f(x,y)\,dx=\int_0^{\boxed{\text{ア}}} dx\int_0^{\boxed{\text{イ}}} f(x,y)\,dy+\int_{\boxed{\text{ア}}}^{6} dx\int_0^{\boxed{\text{ウ}}} f(x,y)\,dy$$

が成り立つ．このとき，**ア** から **ウ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ．

3 (6) 2 重積分

$$I=\iint_D xy\,dxdy,\qquad D:\ 0\leqq x\leqq y,\ 0<x+y\leqq 1$$

を考える．変数変換 $x+y=s$, $y=st$ により，ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\boxed{\quad\text{カ}\quad}$ で，D は

$$E: 0<s\leqq 1\,,\quad \boxed{\quad\text{キ}\quad}\leqq t\leqq\boxed{\quad\text{ク}\quad}$$

に写される．I の値を計算すると，$I=\boxed{\quad\text{ケ}\quad}$ となる．
このとき，**カ** から **ケ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ．

4 次の重積分の値を計算せよ．

(7) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy,\qquad D:\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 2,\ 0\leqq x\leqq\sqrt{y}.$

(8) $\displaystyle\iint_D y\,\cos(x+y)\,dxdy,\qquad D:\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq\frac{\pi}{2}.$

(9) $\displaystyle\iint_D \frac{x+2y}{\sqrt{4-(x-y)^2}}\,dxdy,\qquad D:\ 0\leqq x+2y\leqq 2,\ |x-y|\leqq 1.$

(10) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz,\qquad D:\ x^2+y^2+z^2\leqq 1.$

5 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とし，$A = [\,\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\,]$ と定める．また，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって定義するとき，以下の設問に答えよ．

(11) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, f)$ を求めよ．

(12) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を１組求めよ．ただし，基底をなすベクトルはすべての成分が整数となるように選ぶこと．

(13) $\mathrm{Im}\, f = N(B)$ をみたす 1×3 行列 B の <u>簡約行列</u> を求めよ．ただし，$N(B)$ は行列 B の零空間を表す．

6 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ とし，$V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ とする．また，線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = (x_1 + x_2)\boldsymbol{b}_1 + x_2\,\boldsymbol{b}_2 + x_3\,\boldsymbol{b}_3$$

で定める．さらに，$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in V)$ によって，線形写像 $g : V \to \mathbb{R}^3$ を定義するとき，以下の設問に答えよ．

(14) $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

(15) g の像 $\mathrm{Im}\, g$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, g)$ を求めよ．

(16) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ から $\mathbb{R}^3$ の標準基底への基底変換行列を求めよ．

(17) 基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $\mathcal{A}$ に関する g の表現行列を求めよ．

7 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，以下の設問に答えよ．

(18) 行列 M の固有値をすべて求めよ．

(19) M が定める線形変換 f の 2 次元固有空間が１つだけ存在する．その固有空間の１組の基底として，$\left(\begin{bmatrix} \boxed{} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ の形のものがとれる．空所にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

(20) ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}M^2P$ は対角行列となる．対角行列 $D = P^{-1}M^2P$ を１つ求めよ．