

数学演習第一・期末統一試験【解説】

2025 年 7 月 23 日実施・試験時間 90 分

- 1 n を 1 以上の整数とすると、次の問いに答えよ。ただし、 n による場合分けを用いず、十分整理した形で答えること。

(1) $f(x) = \cos 3x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

【答】 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ より、 $f^{(n)}(x) = \boxed{3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)}$ 。

(2) $f(x) = x^2 \cosh 2x$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき、 $f^{(6)}(0)$ の値を求めよ。

【答】 ライプニッツの公式より、 $f^{(6)}(x) = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (x^2)^{(k)} (\cosh 2x)^{(6-k)} =$
 $x^2 (\cosh 2x)^{(6)} + \binom{6}{1} (2x) (\cosh 2x)^{(5)} + \binom{6}{2} (2) (\cosh 2x)^{(4)} = 2^6 x^2 \cosh 2x + 2^5 \cdot$
 $12x \sinh 2x + 2^4 \cdot 30 \cosh 2x$ であるので $f^{(6)}(0) = 2^4 \cdot 30 = \boxed{480}$ 。

- 2 次の関数 $f(x)$ について、 $x = 0$ における 3 次の漸近展開 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) の各次の係数を (a_0, a_1, a_2, a_3) の形で記せ。

例えば、 $f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) なら、 $(1, 0, -2, 1)$ となる。

(3) $f(x) = \frac{e^{3x}}{1+2x}$

【答】 $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{1}{2}9x^2 + \frac{1}{6}27x^3 + o(x^3) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$,

$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + o(x^3)$ より

$\frac{e^{3x}}{1+2x} = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ であるので求める解は $\boxed{\left(1, 1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$ 。

(4) $f(x) = \sin(\log(1+x))$

【答】 $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$,

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ より

$\sin(\log(1+x)) = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3 +$

$o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ であるので求める解は $\boxed{\left(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)}$ 。

(5) $f(x) = (1+x)^x$

【答】 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$,

$x \log(1+x) = x \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ より

$(1+x)^x = e^{x \log(1+x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ で

であるので求める解は $\boxed{\left(1, 0, 1, -\frac{1}{2}\right)}$ 。

3

(6) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{xe^x - \log(1+x) + 3\cos x - 3}$ を求めよ.

【答】 $\sin^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$

$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ であるので

$$\frac{\sin^{-1} x - \sin x}{xe^x - \log(1+x) + 3\cos x - 3} = \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \boxed{2}.$$

4

次の定積分の値を求めよ.

(7) $\int_5^8 \frac{3x}{x^2 + 4x - 32} dx$

【答】 $\int_5^8 \frac{3x}{x^2 + 4x - 32} dx = \int_5^8 \frac{2}{x+8} + \frac{1}{x-4} dx = [2\log(x+8) + \log(x-4)]_5^8 =$
 $\boxed{10\log 2 - 2\log 13}.$

(8) $\int_4^{12} \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$

【答】 $\sqrt{2x+1} = t$ とおくと $x = \frac{t^2-1}{2}, dx = t dt$ であるので

$$\int_4^{12} \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_3^5 \frac{\frac{t^2-1}{2}}{t} t dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}t^3 - t \right]_3^5 = \boxed{\frac{46}{3}}.$$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

【答】 $\tan \frac{x}{2} = u$ とおくと $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du$ であるので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int_0^1 \frac{2}{2+2u} du = [\log |u+1|]_0^1 = \boxed{\log 2}.$$

(10) $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x) e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$

【答】 $\tan^{-1} x = t$ とおくと $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$ であるので

$$\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x) e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t e^t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t (e^t)' dt = [te^t]_0^{\frac{\pi}{4}} - [e^t]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

 $\boxed{\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) e^{\frac{\pi}{4}} + 1}.$

- 5 (11) 座標空間において 4 点 $A(1, 3, 5)$, $B(3, 6, 9)$, $C(0, 1, 8)$, $D(6, 4, 9)$ を頂点とする四面体の体積を求めよ.

$$\text{【答】 } |\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & -9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -9 & 19 \end{vmatrix} = 71. \text{ よっ}$$

て四面体の体積は, $\frac{71}{6}$.

- 6 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

- (12) A の逆行列を求めよ.

$$\text{【答】 } \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{よって } A \text{ の逆行列は } \begin{bmatrix} -5 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (13) 連立一次方程式 ${}^t A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の解を求めよ.

$$\text{【答】 } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ({}^t A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^t(A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- 7 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 9 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, 4 次正方行列 B の行列式を $|B| = -3$ とするとき,

次の行列式の値を求めよ. (ただし $\tilde{B}$ は B の余因子行列を表す.)

- (14) $|A|$

$$\text{【答】 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 9 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 18 \end{vmatrix} = \boxed{-7}.$$

- (15) $|\tilde{B}|$

【答】 $\tilde{B} = |B|B^{-1}$ であるので

$$|\tilde{B}| = |B|^4 |B^{-1}| = \frac{|B|^4}{|B|} = |B|^3 = \boxed{-27}.$$

- (16) $|\sqrt{2} {}^t A B^{-1} A|$

$$\text{【答】 } |\sqrt{2} {}^t A B^{-1} A| = (\sqrt{2})^4 |{}^t A B^{-1} A| = (\sqrt{2})^4 \frac{|A|^2}{|B|} = \boxed{-\frac{196}{3}}.$$

8 行列 $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 & 6 \\ 7 & -5 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ. (ただし $\tilde{A}$ は A の余因子行列を表す.)

(17) $\tilde{A}$ の $(2, 3)$ 成分を求めよ.

$$\text{【答】 } \tilde{A} = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix} \text{ であるので求める値は } |A_{32}| = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{8}.$$

9 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & a^2 & b^2 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

(18) $|A|$ を因数分解した形で求めよ.

$$\text{【答】 } |A| = \begin{vmatrix} 2 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-2 & b-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-4 & b^2-4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a-2 & b-2 \\ a^2-4 & b^2-4 \end{vmatrix} = -(a-2)(b^2-4) + (a^2-4)(b-2) = (a-2)(b-2)(-b+2+a-2) = \boxed{(a-2)(b-2)(a-b)}.$$

(19) 連立一次方程式 $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ がただ一つの解をもつとき y を a, b で表せ.

$$\text{【答】 } |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & b-2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -16 & b^2-4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -8 & b-2 \\ -16 & b^2-4 \end{vmatrix} = 8b(b-2)$$

$$\text{であるのでクラメールの公式より } y = \frac{|A_2|}{|A|} = \boxed{\frac{8b}{(a-2)(a-b)}}.$$

10 (20) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ に対して, A が正則かつ A^{-1} の $(1, 2)$ 成分が 3 となる a の値を求めよ.

$$\text{【答】 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a-6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-6 & -7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a+1 \text{ であるので } A \text{ が正則である}$$

ためには $a \neq -1$. また $|A_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -1$ であり $\tilde{A} = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix}$ かつ

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$ であるので A^{-1} の $(1, 2)$ 成分は $\frac{-|A_{21}|}{|A|} = \frac{1}{a+1}$. これが 3 となるためには

$$a = \boxed{-\frac{2}{3}}.$$