

数学演習第一・期末統一試験【問題用紙】

2025 年 7 月 23 日実施 ・ 試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

1 n を 1 以上の整数とすると、次の問いに答えよ。ただし、 n による場合分けを用いず、十分整理した形で答えること。

(1) $f(x) = \cos 3x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = x^2 \cosh 2x$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき、 $f^{(6)}(0)$ の値を求めよ。

2 次の関数 $f(x)$ について、 $x = 0$ における 3 次の漸近展開 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) の各次の係数を (a_0, a_1, a_2, a_3) の形で記せ。

例えば、 $f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) なら、 $(1, 0, -2, 1)$ となる。

(3) $f(x) = \frac{e^{3x}}{1 + 2x}$

(4) $f(x) = \sin(\log(1 + x))$

(5) $f(x) = (1 + x)^x$

3 (6) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{xe^x - \log(1 + x) + 3 \cos x - 3}$ を求めよ。

4 次の定積分の値を求めよ。

(7) $\int_5^8 \frac{3x}{x^2 + 4x - 32} dx$

(8) $\int_4^{12} \frac{x}{\sqrt{2x + 1}} dx$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

(10) $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x) e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2} dx$

- 5 (11) 座標空間において 4 点 $A(1, 3, 5)$, $B(3, 6, 9)$, $C(0, 1, 8)$, $D(6, 4, 9)$ を頂点とする四面体の体積を求めよ.

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

- (12) A の逆行列を求めよ.

(13) 連立一次方程式 ${}^tA \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の解を求めよ.

7 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 9 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, 4 次正方行列 B の行列式を $|B| = -3$ とするとき,

次の行列式の値を求めよ. (ただし $\tilde{B}$ は B の余因子行列を表す.)

(14) $|A|$ (15) $|\tilde{B}|$ (16) $|\sqrt{2}{}^tAB^{-1}A|$

8 行列 $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 & 6 \\ 7 & -5 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ. (ただし $\tilde{A}$ は A の余因子行列を表す.)

- (17) $\tilde{A}$ の $(2, 3)$ 成分を求めよ.

9 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & a^2 & b^2 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

- (18) $|A|$ を因数分解した形で求めよ.

(19) 連立一次方程式 $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ がただ一つの解をもつとき y を a, b で表せ.

10 (20) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ に対して, A が正則かつ A^{-1} の $(1, 2)$ 成分が 3 となる a の値を求めよ.