

数学演習第一・中間統一試験【解説】

2025 年 6 月 11 日実施 ・ 試験時間 90 分

1 逆三角関数について、次の問いに答えよ.

(1) $\text{Sin}^{-1}\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$ の値を求めよ.

【答】 $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5} = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ より, $\text{Sin}^{-1}\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{5}}$.

(2) 方程式 $\text{Cos}^{-1} x + 2 \text{Tan}^{-1} 2 = \pi$ を解け.

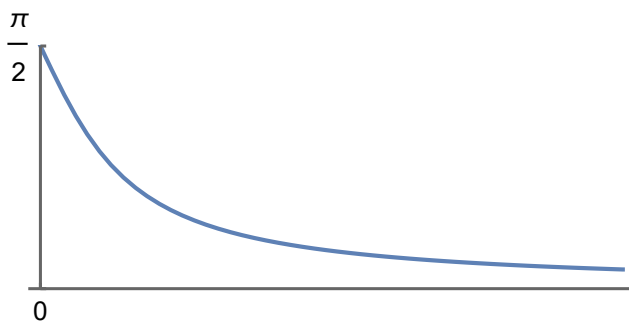
【答】 $\alpha = \text{Tan}^{-1} 2$ とおけば, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. このとき, $\text{Cos}^{-1} x = \pi - 2\alpha \in (0, \pi)$ であるから, 解 x は確かに存在し, $x = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$ で与えられる. ここで,

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$$

であるから, $x = 1 - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$.

(3) $y = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフの概形を解答欄に図示せよ (グラフの凹凸がわかるようにかくこと). ただし, 値域が読み取れるように座標軸に必要な数値を書き入れよ.

【答】



上図の曲線部分が $y = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフとなる. ただし, 点 $(0, \frac{\pi}{2})$ は除く.

2 次の極限値を求めよ. ※ロピタルの定理を用いた箇所を $\star$ で表す.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \text{Sin}^{-1} x}$

【答】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \text{Sin}^{-1} x} \stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2} + 1)}{-x^2} = \boxed{-6}.$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x2^x} \log \sqrt[3]{\frac{e+x}{e-x}}$

【答】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x2^x} \log \sqrt[3]{\frac{e+x}{e-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \sqrt[3]{\frac{e+x}{e-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e+x) - \log(e-x)}{3x} \\ &\stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e+x} + \frac{1}{e-x}}{3} = \boxed{\frac{2}{3e}}. \end{aligned}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Cos}^{-1} \frac{1}{x} \right)^x$$

【答】 $y = \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Cos}^{-1} \frac{1}{x} \right)^x$ とおく.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log y &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Cos}^{-1} \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Cos}^{-1} \frac{1}{x} \right)}{x^{-1}} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-x^{-2}} \cdot \frac{-\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\frac{2}{\pi} \operatorname{Cos}^{-1} \frac{1}{x}} \\ &= -\frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Cos}^{-1} \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log y} = \boxed{e^{-\frac{2}{\pi}}}.$$

3 関数の導関数, 微分係数について, 次の問いに答えよ.

(7) 関数 $f(x) = x^{\operatorname{Tan}^{-1} x}$ ($x > 0$) の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

【答】 $\log f(x) = (\operatorname{Tan}^{-1} x) \log x$ の両辺を微分して, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{Tan}^{-1} x}{x}$ を得る. よって,

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{Tan}^{-1} x}{x} \right) = \boxed{x^{\operatorname{Tan}^{-1} x} \left(\frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{Tan}^{-1} x}{x} \right)}.$$

(8) 関数 $y = (x^2 - 1)^2$ ($0 < x < 1$) の逆関数 $x = \varphi(y)$ に対して, $\varphi'(\frac{1}{16})$ を求めよ.

【答】 $\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{4x(x^2 - 1)}$. 次に, $(x^2 - 1)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \pm \frac{1}{4}$ なので, $x^2 = \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ となる.

よって, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}$ となる. $0 < x < 1$ だったので, $\varphi'(\frac{1}{16}) = \frac{1}{4x(x^2 - 1)} \Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

(9) 関数 $y = \frac{1}{\sqrt{\sinh x}}$ ($x > 0$) の逆関数 $x = \psi(y)$ に対して, $\psi'(1)$ を求めよ.

【答】 $\psi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{\cosh x}{2(\sinh x)^{3/2}}} = -\frac{2(\sinh x)^{3/2}}{\cosh x}$. 次に, $\frac{1}{\sqrt{\sinh x}} = 1 \Leftrightarrow \sinh x = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2$ となる. $X = e^x$ とおくと, $X - \frac{1}{X} = 2 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 1 = 0$ となる. この X の2次方程式を解いて, $X = 1 \pm \sqrt{2}$ を得る. $X = e^x > 0$ より, $e^x = 1 + \sqrt{2}$ ($\Leftrightarrow x = \log(1 + \sqrt{2})$) となる. $e^{-x} = (1 + \sqrt{2})^{-1} = \sqrt{2} - 1$ に注意して,

$$\psi'(y) = -\frac{2(\sinh x)^{3/2}}{\cosh x} = -\frac{2\left(\frac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{2}\right)^{3/2}}{\frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2}} = \boxed{-\sqrt{2}}.$$

4 (10) 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(|x| - 1)^{\frac{2}{3}}$ の極小値を求めよ. ただし, 「 $x = a$ で極小値 b 」という形で答えよ.

【答】 導関数は次で与えられる:

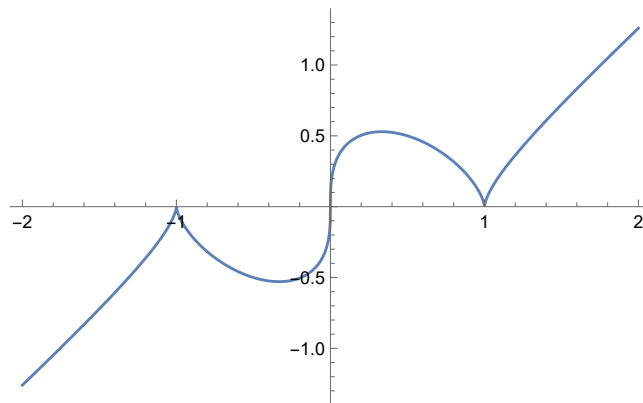
- $x > 0$ のとき, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(3x-1),$
- $x < 0$ のとき, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(-x-1)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)(-x-1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(-x-1)^{-\frac{1}{3}}(3x+1).$

これより, $f(x)$ の増減は次の通り:

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-1/3$	$\cdots$	0	$\cdots$	$1/3$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{4}/3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}/3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

よって, $f(x)$ は $\boxed{x = -\frac{1}{3} \text{ で極小値 } -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}}$, $\boxed{x = 1 \text{ で極小値 } 0}$ をとる.

注 $x > 0$ での増減を調べて, $f(x)$ が奇関数であることを用いてもよい.



5 空間内の3点 $A(3, 2, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(4, 1, 0)$ について、次の問いに答えよ。

(11) 3点 A, B, C を通る平面 α の方程式を求めよ。

【答】 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ なので、 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x - y + 3z = 7}$ 。

(12) 原点 O から平面 α に下ろした垂線の長さを求めよ。

【答】 原点 O から平面 α に下ろした垂線を OD とする。 $\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と書ける。これを (11)

で求めた平面 α の方程式に代入して、 $2 \cdot 2t - (-t) + 3 \cdot 3t = 7 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ を得る。よって、

$$\|\overrightarrow{OD}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}.$$

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ および $M = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(13) tMM の第3行の行ベクトルを求めよ。

【答】 ${}^tMM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ より、 tMM の第3行の行ベクトルは $\boxed{[1 \ 3 \ 5 \ -3]}$ 。

(14) $AXB = BA$ を満たす行列 X を求めよ。

【答】 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ より、

$$X = A^{-1}BAB^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}}.$$

7 (15) 4つのベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$ が1次従属であるための k の条件を求めよ。

【答】 1次関係式 $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = 0$ を考える。これは c_1, c_2, c_3, c_4 を変数とする連立1次方程式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ と見なせる. 係数行列を簡約化して,}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & k \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & k+5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & k+5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k+11 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次従属であることは, 非自明解 (c_1, c_2, c_3, c_4) が存在することと同値なので, 求める k の条件は $\boxed{k = -11}$.

8 (16) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 2 & a+4 & a^2-6 \\ 1 & 3a+7 & -1 \end{bmatrix}$ の階数が 2 となる a の値を求めよ.

【答】 $\begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 2 & a+4 & a^2-6 \\ 1 & 3a+7 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 0 & -3a-6 & a^2-4 \\ 0 & a+2 & 0 \end{bmatrix}$ となる. $a = -2$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 0 & -3a-6 & a^2-4 \\ 0 & a+2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 0 & -3a-6 & a^2-4 \\ 0 & a+2 & 0 \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので階数は 1 となる. $a \neq -2$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 0 & -3a-6 & a^2-4 \\ 0 & a+2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 0 & -3 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$
 $\begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$ となる. よって, $a = 2$ のとき階数は 2 となり, $a \neq 2$ のとき階数は 3 となる. 以上より, 階数が 2 となる a の値は $\boxed{2}$.

9 連立 1 次方程式に関する以下の問いに答えよ. ただし, (18), (20) において解が任意定数を含む場合は, 任意定数の選び方は標準的な方法, すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え. また, 任意定数の文字は $s, t, \dots$ をこの順に用いよ.

(17) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ の拡大係数行列の階数を求めよ.

【答】 拡大係数行列を行基本変形して,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] &\xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{2} + \textcircled{1} \times 1 \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-2) \\ \textcircled{4} + \textcircled{1} \times (-1) \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -9 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{1} + \textcircled{2} \times (-1) \\ \textcircled{3} + \textcircled{2} \times 1 \\ \textcircled{4} + \textcircled{2} \times (-3) \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{3} \times (-\frac{1}{6}) \\ \textcircled{4} \times \frac{1}{5} \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{1} + \textcircled{3} \times (-4) \\ \textcircled{2} + \textcircled{3} \times 1 \\ \textcircled{4} + \textcircled{3} \times (-1) \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって, 拡大係数行列の階数は $\boxed{3}$.

(18) (17) の同次連立 1 次方程式を解け.

【答】 (17) の結果より, (17) の同次連立 1 次方程式は
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$
 と同値となる. ここ

で, “主成分に対応しない変数” x_3 を任意定数にとり, $x_3 = s$ とおいて, 解は

$$\begin{cases} x_1 = 1 + s \\ x_2 = -1 - s \\ x_3 = s \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s \text{ は任意定数})$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).

(19) 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + kx_3 = -3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$
 が無数の解をもつような定数 k の条件を求めよ.

【答】 拡大係数行列を行基本変形して,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & k & -3 \\ 1 & k & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}+\textcircled{1}\times(-1)]{\textcircled{2}+\textcircled{1}\times 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & k+2 & 7 \\ 0 & k-2 & 0 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}\times\frac{1}{7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{k+2}{7} & 1 \\ 0 & k-2 & 0 & -4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\textcircled{3}+\textcircled{2}\times(-(k-2))} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{k+2}{7} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(k+2)(k-2)}{7} & -4-(k-2) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって,

- $k = 2$ のとき: 係数行列の階数が 2, 拡大係数行列の階数が 3 となり解は存在しない.
- $k = -2$ のとき: 係数行列の階数も拡大係数行列の階数も 2 となり解は無数に存在する.
- $k \neq \pm 2$ のとき: 係数行列の階数も拡大係数行列の階数も 3 となり解はただ一つ存在する.

以上より, 求める k の条件は $\boxed{k = -2}$.

(20) k が (19) で求めた条件を満たすとき, (19) の連立 1 次方程式を解け.

【答】 拡大係数行列を行基本変形して得られる簡約行列は
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$
 となる. よって, (19) の連立 1

次方程式は
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$
 と同値となる. ここで, “主成分に対応しない変数” x_3 を任意定数にとり, $x_3 = s$ とおいて, 解は

$$\begin{cases} x_1 = 3 - s \\ x_2 = 1 \\ x_3 = s \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s \text{ は任意定数})$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).