

数学演習第一・中間統一試験【問題用紙】

2025 年 6 月 11 日実施 ・ 試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

1 逆三角関数について、次の問いに答えよ.

(1) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$ の値を求めよ.

(2) 方程式 $\cos^{-1} x + 2 \tan^{-1} 2 = \pi$ を解け.

(3) $y = \tan^{-1} \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフの概形を解答欄に図示せよ (グラフの凹凸がわかるようにかくこと). ただし、値域が読み取れるように座標軸に必要な数値を書き入れよ.

2 次の極限值を求めよ.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin^{-1} x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x 2^x} \log \sqrt[3]{\frac{e+x}{e-x}}$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{x}\right)^x$

3 関数の導関数、微分係数について、次の問いに答えよ.

(7) 関数 $f(x) = x^{\tan^{-1} x}$ ($x > 0$) の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(8) 関数 $y = (x^2 - 1)^2$ ($0 < x < 1$) の逆関数 $x = \varphi(y)$ に対して、 $\varphi'\left(\frac{1}{16}\right)$ を求めよ.

(9) 関数 $y = \frac{1}{\sqrt{\sinh x}}$ ($x > 0$) の逆関数 $x = \psi(y)$ に対して、 $\psi'(1)$ を求めよ. ただし、 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ とする.

4 (10) 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(|x| - 1)^{\frac{2}{3}}$ の極小値をすべて求めよ. ただし、「 $x = a$ で極小値 b 」という形で答えよ.

5 空間内の3点 $A(3, 2, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(4, 1, 0)$ について、次の問いに答えよ.

(11) 3点 A, B, C を通る平面 α の方程式を求めよ.

(12) 原点 O から平面 α に下ろした垂線の長さを求めよ.

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ および $M = [A \ B]$ について、次の問いに答えよ.

(13) tMM の第3行の行ベクトルを求めよ.

(14) $AXB = BA$ を満たす行列 X を求めよ.

7 (15) 4つのベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$ が1次従属であるための k の条件を求めよ.

8 (16) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & -1 \\ 2 & a+4 & a^2-6 \\ 1 & 3a+7 & -1 \end{bmatrix}$ の階数が2となる a の値を求めよ.

9 連立1次方程式に関する以下の問いに答えよ. ただし, (18), (20) において解が任意定数を含む場合は, 任意定数の選び方は標準的な方法, すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え. また, 任意定数の文字は $s, t, \dots$ をこの順に用いよ.

(17) 連立1次方程式
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$
 の拡大係数行列の階数を求めよ.

(18) (17) の連立1次方程式を解け.

(19) 連立1次方程式
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + kx_3 = -3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$
 が無数の解をもつような定数 k の条件を求めよ.

(20) k が (19) で求めた条件を満たすとき, (19) の連立1次方程式を解け.