

数学演習第一（演習第2回）【解答例】

線形：平面の方程式，行列の演算（2025年5月7日実施）

演習問題

1 (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -15$. (2) なす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{-15}{3 \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. よって, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

(3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$. (4) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積) $= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = 15$. ($\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ を計算してもよい.)

(5) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る平行六面体の体積) $= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |11 - 10 + 2| = 3$.

(6) 四面体の体積は平行六面体の体積に対して、底面の面積は半分で、更に錐となっているので体積は $1/6$ となる。よって、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ の作る四面体の体積}) = \frac{1}{6} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ の作る平行六面体の体積}) = \frac{1}{6} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2 (i) $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}'' = k\mathbf{a} + \mathbf{b}''$ と \mathbf{a} との内積をとれば, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2$. よって, $k = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})/\|\mathbf{a}\|^2$ となり,

$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = (\|\mathbf{b}\| \cos \theta) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \|\mathbf{b}'\| = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} = \|\mathbf{b}\| |\cos \theta| \quad (\theta \in (0, \pi) \text{ は } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ のなす角}).$$

(ii) (i) の結果より, $\mathbf{b}'' = \mathbf{b} - \mathbf{b}' = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$. また, $\mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{b}$ は直角三角形の3辺に重なるから,

$$\|\mathbf{b}''\| = \sqrt{\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{b}'\|^2} = \sqrt{\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2 \cos^2 \theta} = \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \frac{\|\mathbf{b}\| \|\mathbf{a}\| \sin \theta}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\mathbf{b} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

次に, **1** の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して,

(7) \mathbf{c} の「 \mathbf{a} に平行な直線」への正射影は $\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = -\frac{1}{3} \mathbf{a} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$.

(8) まず, \mathbf{a}, \mathbf{b} に平行な平面の法線ベクトルとして $\mathbf{n} := \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$ をとる. \mathbf{c} の「 \mathbf{n} に平行な直線」へ

の正射影は $\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$. よって, \mathbf{c} の「 \mathbf{a}, \mathbf{b} に平行な平面」(「 \mathbf{n} に垂直な平面」) への正射影は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 64 \\ -85 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64/75 \\ -17/15 \\ 73/75 \end{bmatrix}.$$

3 (1) 直線 AB は点 A(1, 2, 0) を通り, $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, 方程式は $x - 1 = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z}{2}$.

(2) 平面 ABC は点 A(1, 2, 0) を通り, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, 方程式は $(x - 1) - 5(y - 2) - 8z = 0$. これを整理して, $x - 5y - 8z + 9 = 0$ (または $x - 5y - 8z = -9$).

(3) 原点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすとき, 直線 OH は原点 O を通り, 平面 ABC の法線ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, $H(s, -5s, -8s)$ と書ける. 更に, H は平面 ABC 上の点であるから, $s - 5 \cdot (-5s) - 8 \cdot (-8s) + 9 = 0$ を満たす. これを解いて $s = -\frac{1}{10}$ となり, H の座標は $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5})$ で,

垂線の長さは $\|\vec{OH}\| = \frac{1}{10}\sqrt{1+25+64} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{10}}}$.

【別法】 求める垂線の長さは \vec{OA} の「平面 ABC の法線」($\vec{AB} \times \vec{AC}$ に平行) への正射影の長さに他ならない. よって,

2 (i) を用いて, (垂線の長さ) $= \frac{|\vec{OA} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|} = \frac{|1-10+0|}{\sqrt{1+25+64}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{10}}}$.

【補足】 一般に, 点 (x_1, y_1, z_1) から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の長さは $\boxed{\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ で与えられる. この事実を示そう. 点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ とし, 平面 $ax+by+cz+d=0$ 上に点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ をとる. このとき, 垂線の長さは $\vec{P_0P_1}$ の平面 $ax+by+cz+d=0$ の法線 ($\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする) への正射影の長さに他ならない. このとき, $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ であるから, $\vec{P_0P_1} \cdot \mathbf{n}$ は

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0) = (ax_1+by_1+cz_1) - (ax_0+by_0+cz_0) = ax_1+by_1+cz_1+d$$

と計算される. よって, 求める垂線の長さは $\frac{|\vec{P_0P_1} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(4) 点 C から直線 AB に垂線 CK を下ろすとき, 点 K は直線 AB 上の点であるから, $K(t+1, -3t+2, 2t)$ と書ける. このとき,

$$\vec{CK} = \begin{bmatrix} t+2 \\ -3t+2 \\ 2t-1 \end{bmatrix} \text{ と直線 } AB \text{ は垂直ゆえ, } \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t+2 \\ -3t+2 \\ 2t-1 \end{bmatrix} = t+2-3(-3t+2)+2(2t-1) = 0. \text{ これより } t = \frac{3}{7} \text{ が得}$$

られ, 点 K の座標は $(\frac{10}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7})$ であり, $\vec{CK} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 17 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$. よって, 垂線の長さは $\|\vec{CK}\| = \frac{1}{7} \sqrt{289+25+1} = \boxed{\frac{3\sqrt{35}}{7}}$.

【別法】 求める垂線の長さは \vec{AC} の「直線 AB に垂直な平面」への正射影の長さに他ならない. よって, 2 (ii) を用いて,

(垂線の長さ) $= \frac{\|\vec{AC} \times \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}}} = \boxed{\frac{3\sqrt{35}}{7}}$.

4 (1) $2A-3B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -4 \\ -4 & -9 & -5 \end{bmatrix}$.

(2) $X = \frac{1}{2}(B-3A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 2 \end{bmatrix}$.

(3) $BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 10 \\ -5 & -1 & 10 \end{bmatrix}$.

(4) $A^t C^t B = A^t(BC) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 4 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -17 & -15 \end{bmatrix}$.

5 (1) $(A-aE)(A-dE) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = bcE$. 左辺を展開すれば $A^2 - (a+d)A + adE$ であるから, 確かに $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ が成り立つ.

(2) (1) の関係式より, $(ad-bc)E = (a+d)A - A^2 = A((a+d)E - A) = ((a+d)E - A)A$. よって, $\tilde{A} = (a+d)E - A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおけば, 確かに $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad-bc)E$ が成り立つ.

(3) ① $ad-bc \neq 0$ ならば, (2) の関係式の両辺を $ad-bc \neq 0$ で割り, $A\left(\frac{1}{ad-bc}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{ad-bc}\tilde{A}\right)A = E$.

定義により $\frac{1}{ad-bc}\tilde{A}$ は A の逆行列である (A は正則): $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\tilde{A} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

② $ad-bc = 0$ ならば $A\tilde{A} = O$ となるが, このとき A が逆行列 A^{-1} をもつ (= 正則) と仮定すれば, $\tilde{A} = (A^{-1}A)\tilde{A} = A^{-1}(A\tilde{A}) = A^{-1}O = O$ となり, $A = O$ が従う (成分に注目). ところが, $A = O$ はどんな 2 次正方行列を掛けても O となるので, A が逆行列をもつという仮定に矛盾する.

6 (1) 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, ① $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$,

$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix}.$$

(2) $AX = BA - 2B$ の両辺の左側から A^{-1} を掛けて $X = A^{-1}(BA - 2B)$ を計算すればよい.

$$BA - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから,

$$X = A^{-1}(BA - 2B) = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{7} \quad (1) (x', y') = (x, -y) \text{ より, } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ すなわち, } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) $x' + iy' = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$ より,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ すなわち, } Q_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

(3) ヒントにより, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta \left(P \left(Q_{-\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \right) = Q_\theta P Q_{-\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が成り立つ (第 2 の等号は行列の積の結合法則による). よって,

$$\begin{aligned} R_\theta &= Q_\theta P Q_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

レポート問題

(1) (i) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 19 \\ 7 \end{bmatrix}$. これが平面 ABC の法線ベクトルとなり, 点 A を通ることに注意すると, 平面の方程式は, $18(x-1)+19(y-2)+7(z+1)=0$ となる. 整理すると, $\boxed{18x+19y+7z=49}$.

(ii) 直線 ℓ の 1-パラメータ表示は, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-2t \\ 1+3t \end{bmatrix}$ である. t を消去して得られる $\boxed{x-1 = -\frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}}$ が直線 ℓ の方程式となる.

(iii) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-2t \\ 1+3t \end{bmatrix}$ が (i) で求めた平面 ABC の方程式をみたす条件は, $18(1+t)+19(1-2t)+7(1+3t)=49$ である. このとき, $t=5$. よって求める交点は, $\boxed{(6, -9, 16)}$.

(2) X は 3×2 行列, Y は 2×2 行列だから, 行列の積 YX および tXY は定義されないことに注意すると, 積が定義されているものは次の 3 つである.

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad XY{}^tX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad X{}^tY{}^tX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

なお, $X{}^tY{}^tX = {}^t(XY{}^tX)$ であることにも注意せよ.