数学演習第一（演習第 5 回）【解答例】

微積：極値, 関数の増減, ロピタルの定理（2025 年 5 月 28 日実施)

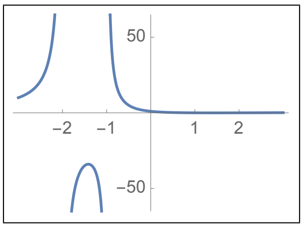
演習問題

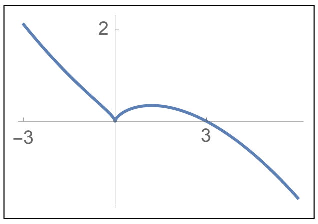
1 (1) まず, $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$ は $x \neq -2, -1$ で連続かつ微分可能であることに注意する. $x \neq -2, -1$ において $f(x) = 1 - \dfrac{6x}{x^2+3x+2}$ を微分すると, $f'(x) = \dfrac{-6(x^2+3x+2)+6x(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} = \dfrac{6(x^2-2)}{(x^2+3x+2)^2}$. また, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-1\pm0} f(x) = \pm\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-2\pm0} f(x) = \mp\infty$ (複号同順) であるから $f(x)$ の増減表は以下の通り. よって, 極大値は $f(-\sqrt{2}) = \dfrac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -17-12\sqrt{2}$, 極小値は $f(\sqrt{2}) = \dfrac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = -17+12\sqrt{2}$ である. グラフは左下の図の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	$-2-0$	$-2+0$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1-0$	$-1+0$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	$+$	∞	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	1

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続, $x \neq 0$ において微分可能であり, 導関数は $f'(x) = \dfrac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}}(3-x) - \dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{6-5x}{9\sqrt[3]{x}}$. よって, $x < 0$ ならば $f'(x) < 0$, $0 < x < 6/5$ ならば $f'(x) > 0$, $6/5 < x$ ならば $f'(x) < 0$ である. また, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ (複号同順), $f(0) = 0$ である. 以上のことから $f(x)$ の増減表は以下のようになり, 極大値は $f\left(\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(3-\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, 極小値は $f(0) = 0$ である. グラフは右下の図の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$





2 ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) $$\lim_{x\to\infty} x\log\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x-1)-\log(x+1)}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{(x-1)(x+1)} = -2.$$

【補足】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log(x-1)-\log(x+1)\} = \lim_{x\to\infty}\log\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\log\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \log\frac{1-0}{1+0} = 0.$
微分が楽なので $\log(x-1)-\log(x+1)$ の形に変形している.

【別法】 $t = \frac{1}{x}$ とおけば $x\to\infty$ のとき $t\to+0$ であり,

$$x\log\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{t}\log\frac{1-t}{1+t} = \frac{\log(1-t)}{-t}\cdot(-1) - \frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to+0]{x\to\infty} -1-1 = -2.$$

(2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\sin x}-2}{\log(\sin x)} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\sin x}\log 2\cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2^{\sin x}\sin x\log 2 = 2\log 2$$

【別法】 $t = \sin x - 1$ とおけば $x \to \frac{\pi}{2}$ のとき $t \to 0$ であり,

$$\frac{2^{\sin x}-2}{\log(\sin x)} = \frac{2^{1+t}-2}{\log(1+t)} = \frac{t}{\log(1+t)}\,\frac{2(2^t-1)}{t} = \frac{t}{\log(1+t)}\,\frac{e^{t\log 2}-1}{t\log 2}\cdot 2\log 2 \xrightarrow[t\to0]{x\to\frac{\pi}{2}} 2\log 2.$$

(3) $$\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)} \overset{\star}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos bx}{\sin bx}} = \lim_{x\to+0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}\,\frac{\sin bx}{\sin ax} = \lim_{x\to+0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}\cdot\frac{\frac{\sin bx}{bx}}{\frac{\sin ax}{ax}}\cdot\frac{b}{a} = 1.$$

【別法】 $x \to +0$ のとき, $\log x \to -\infty$, $\log \frac{\sin x}{x} \to \log 1 = 0$ に注意して,

$$\frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)} = \frac{\log \frac{\sin ax}{x} + \log x}{\log \frac{\sin bx}{x} + \log x} = \frac{\frac{\log \frac{\sin x}{x} + \log a}{\log x} + 1}{\frac{\log \frac{\sin x}{x} + \log b}{\log x} + 1} \xrightarrow{x \to +0} 1.$$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^3 - x^2 - x - 1} = \frac{1^4 - 4 \cdot 1 + 3}{1^3 - 1^2 - 1 - 1} = 0,$

【注意】 $x \to 1$ のとき分子は 0 に収束するが, 分母は 0 に収束しないのでロピタルの定理は使えない. 実際,

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^4 - 4x + 3)'}{(x^3 - x^2 - x + 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{4x^3 - 4}{3x^2 - 2x - 1} \overset{\star}{=} \lim_{x \to 1} \frac{12x^2}{6x - 2} = 3$$

となり値は異なる. ロピタルの定理が使える条件を満たしているかどうかは必ずチェックしよう.

(5) まず, $y = (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$ の対数を考える. $\log y = \frac{1}{\sin x} \log(1 + 2x) = \frac{\log(1+2x)}{\sin x}$ であるから,

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \log y = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + 2x)}{\sin x} \overset{\star}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\cos x} = 2$ となる. よって, $\displaystyle\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} e^{\log y} = e^2$.

(6) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1.$

3 ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) 分母 $\sqrt[3]{x}$ は $x = -1$ で連続で, 値 -1 をとる. 一方, 分子の極限は

$$\lim_{x \to -1+0} (x + 1) \log(x + 1) = \lim_{x \to -1+0} \frac{\log(x + 1)}{\frac{1}{x+1}} \overset{\star}{=} \lim_{x \to -1+0} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = -\lim_{x \to -1+0} (x + 1) = 0$$

と計算できる. よって, 求める極限は $\displaystyle\lim_{x \to -1+0} f(x) = 0$ である.

(2) $x \to 0$ において $f(x)$ は $\frac{0}{0}$ 型の不定形である. ロピタルの定理を用いると,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + 1) \log(x + 1)}{\sqrt[3]{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\log(x + 1) + 1}{\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}} = \lim_{x \to 0} 3(\sqrt[3]{x})^2 \{\log(x + 1) + 1\} = 0$$

となり, $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$ を得る.

【別法】 $\displaystyle\frac{(x + 1) \log(x + 1)}{\sqrt[3]{x}} = (x + 1) x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\log(1 + x)}{x} \xrightarrow{x \to 0} 0 \cdot 1 = 0.$

【注】(1), (2) の結果から, 与えられた関数 $f(x)$ は $f(-1) = f(0) = 0$ と定めることにより, $x \geq -1$ で定義された連続関数と見なすことができる. 以下では, こうして得られた $x \geq -1$ 上の連続関数 $f(x)$ を考える.

(3) $x > -1, x \neq 0$ において, $f'(x) = \dfrac{(2x - 1) \log(x + 1) + 3x}{3(\sqrt[3]{x})^4}$, $f''(x) = \dfrac{(x - 2)\{3x - 2(x + 1) \log(x + 1)\}}{9(x + 1)(\sqrt[3]{x})^7}$.
ここで, $\varphi(x) = 3x - 2(x+1) \log(x+1)$ とおけば, $\varphi'(x) = 1 - 2 \log(x+1) \geq 1$ $(-1 < x \leq 0)$, $\varphi(0) = 0$ であるから, $\varphi(x) < 0$ $(-1 < x < 0)$, 従って $f''(x) = \dfrac{(x - 2)\varphi(x)}{9(x + 1)(\sqrt[3]{x})^7} < 0$ $(-1 < x < 0)$ となり, $y = f(x)$ が $-1 < x < 0$ において上に凸であることが分かる. $f(-1) = f(0) = 0$ であるから, $f(x)$ はこの区間上のただ 1 点 (α とする) で極大になることが分かる.

【別法】 $f'(x)$ の分子を $\psi(x) = (2x - 1) \log(x + 1) + 3x$ $(x > -1)$ とおけば,

$$\psi'(x) = \frac{5x + 2}{x + 1} + 2 \log(x + 1), \quad \psi''(x) = \frac{2x + 5}{(x + 1)^2} > 0 \ \ (x > -1).$$

よって, $x > -1$ において $\psi(x)$ は下に凸の関数. 更に, $x \to -1 + 0$ のとき $\psi(x) \to \infty$, $x = 0$ の近くで

$$\psi(x) = x \left\{ 2 \log(1 + x) + 3 - \frac{\log(x + 1)}{x} \right\} \approx 2x \quad (\{\ldots\} \text{ 内が } 2 \text{ で近似できる})$$

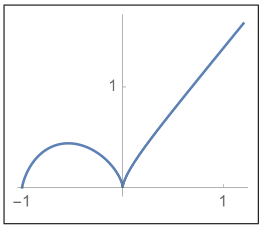
となるので, 区間 $-1 < x < 0$ において次を満たす α が一意に存在する: $-1 < x < \alpha$ において $\psi(x) > 0$ ($f(x)$ は単調増加), $\alpha < x < -1$ において $\psi(x) < 0$ ($f(x)$ は単調減少).

(4) (3) で求めた $f'(x)$ を $x > 0$ において考える. $\psi(x) = (2x - 1) \log(x + 1) + 3x$ ($x > -1$ で定義される) とおけば, $\psi'(x) = 2 \log(x + 1) + 5 - \dfrac{3}{x + 1} \geq 2$ $(x \geq 0)$, $\psi(0) = 0$ であるから, $\psi(x) > 0$ $(x > 0)$. 従って

$f'(x)=\dfrac{\psi(x)}{3(\sqrt[3]{x}\,)^4}>0\ (x>0)$ となり, $f(x)$ が $x>0$ において単調増加であることが分かる.

(5) 最後に $x\to\pm0$ における $f'(x)$ の極限を調べる. (4) で定めた $\psi(x)$ は $\psi(0)=0,\ \psi'(0)=2>0$ を満たすから, $\displaystyle\lim_{x\to\pm0}f'(x)=\lim_{x\to\pm0}\frac{\psi(x)}{3(\sqrt[3]{x}\,)^4}\overset{\star}{=}\lim_{x\to\pm0}\frac{\psi'(x)}{4\sqrt[3]{x}}=\pm\infty$ (複号同順). また, $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f'(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ はほとんど明らか. 以上, (1)–(4) と合わせて, 増減表と $y=f(x)$ のグラフは以下の通り.

x	$-1+0$	$\cdots$	α	$\cdots$	-0	$+0$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$	∞	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0		$\nearrow$	∞



【別法】 $\displaystyle\lim_{x\to\pm0}f'(x)=\pm\infty$ について述べる. (3) の別法と同様に, $x=0$ の近くで

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left\{2\log(1+x)+3-\frac{\log(x+1)}{x}\right\}\approx\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

となるので主張はほとんど明らか.

4 ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) $f'(x)=\left(\sqrt[5]{x}\right)'\operatorname{Tan}^{-1}x+\sqrt[5]{x}(\operatorname{Tan}^{-1}x)'=\dfrac{\operatorname{Tan}^{-1}x}{5\sqrt[5]{x^4}}+\dfrac{\sqrt[5]{x}}{1+x^2}\ (x\neq0)$.

(2) $\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[5]{h}\operatorname{Tan}^{-1}h}{h}\overset{\star}{=}\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt[5]{h}\operatorname{Tan}^{-1}h)'}{(h)'}=\lim_{h\to0}\left(\frac{\operatorname{Tan}^{-1}h}{5\sqrt[5]{h^4}}+\frac{\sqrt[5]{h}}{1+h^2}\right)$.

ここで, $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{Tan}^{-1}h}{5\sqrt[5]{h^4}}\overset{\star}{=}\lim_{h\to0}\frac{(\operatorname{Tan}^{-1}h)'}{(5\sqrt[5]{h^4})'}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1+h^2}}{4h^{-\frac{1}{5}}}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[5]{h}}{4(1+h^2)}=0$, $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[5]{h}}{1+h^2}=0$ であるから, $\displaystyle\lim_{h\to0}\left(\frac{\operatorname{Tan}^{-1}h}{5\sqrt[5]{h^4}}+\frac{\sqrt[5]{h}}{1+h^2}\right)=0$, 即ち $f'(0)=0$ である.

【別法】 まず, $t=\operatorname{Tan}^{-1}h$ とおけば, $h=\tan t$ で, $h\to0$ のとき $t\to0$ であり,

$$\frac{\operatorname{Tan}^{-1}h}{h}=\frac{t}{\tan t}=\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\xrightarrow[t\to0]{h\to0}1.\quad よって,\ \frac{\operatorname{Tan}^{-1}h}{5\sqrt[5]{h^4}}=\frac{1}{5}\sqrt[5]{h}\cdot\frac{\operatorname{Tan}^{-1}h}{h}\xrightarrow{h\to0}0\cdot1=0.$$

【補足 1】区間 I 上で定義された連続関数 $\varphi(x)$ が, 区間内の 1 点 $a\in I$ を除いて C^1 級 (連続微分可能) であるとする. このとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\varphi'(x)$ が存在すれば, $\varphi(x)$ は $x=a$ で微分可能であり, $\displaystyle\lim_{x\to a}\varphi'(x)=\varphi'(a)$ が成り立つこと (従って $\varphi(x)$ は I 全体で C^1 級となること) が (2) と同様にしてわかる.

【補足 2】 補足 1 のために上記のような式変形を解答に載せたが, 実際は

$$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[5]{h}\operatorname{Tan}^{-1}h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{Tan}^{-1}h}{\sqrt[5]{h^4}}\overset{\star}{=}\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1+h^2}}{\frac{4}{5\sqrt[5]{h}}}=\lim_{h\to0}\frac{5\sqrt[5]{h}}{4(1+h^2)}=0$$

とした方が計算は楽である.

(3) 明らかに $x>0$ のとき $f'(x)>0$, $x<0$ のとき $f'(x)<0$, $f'(0)=0$ であるから増減表は以下のようになり、$x=0$ で極小値 0 をとる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

5 (1) $\displaystyle\varphi'(x)=4x^3\left(\cos\frac{1}{x^2}+2x^2\sin\frac{1}{x^2}\right)+x^4\left(\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}+4x\sin\frac{1}{x^2}-2x^2\cdot\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\right)=2x(1+6x^4)\sin\frac{1}{x^2}$,

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=3x^2\left(4+3x^2\sin\frac{2}{x^2}\right)+x^3\left(6x\sin\frac{2}{x^2}-\frac{12}{x}\cos\frac{2}{x^2}\right)=12x^2\left(1-\cos\frac{2}{x^2}\right)+15x^4\sin\frac{2}{x^2}\\&=24x^2\sin^2\frac{1}{x^2}+30x^4\cos\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}=6x^2\left(4\sin\frac{1}{x^2}+5x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)\sin\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

(2) $0<|x|\leq1$, $x\to0$ のとき, $|\varphi(x)|\leq x^4(1+2x^2)\leq3x^4\to0$, $|\psi(x)|\leq|x|^3(4+3x^2)\leq7|x|^3\to0$,

$|\varphi'(x)| \le 2|x|(1+6x^4) \le 14|x| \to 0$, $|\psi'(x)| \le 6x^2(4+5x^2) \le 54x^2 \to 0$. よって, 確かに, $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to 0}\varphi'(x) = \lim_{x\to 0}\psi'(x) = 0$.

(3) $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{x(\cos\frac{1}{x^2} + 2x^2\sin\frac{1}{x^2})}{4+3x^2\sin\frac{2}{x^2}}$, $\dfrac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = \dfrac{3x(4\sin\frac{1}{x^2} + 5x^2\cos\frac{1}{x^2})}{1+6x^4}$ $(2x\sin\frac{1}{x^2}$ で約分した) であるから, $0 < |x| \le 1$, $x \to 0$ のとき, $\left|\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| \le \dfrac{|x|(1+2x^2)}{4-3x^2} \le 3|x| \to 0$, $\left|\dfrac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right| \le 3|x|(4+5x^2) \le 27|x| \to 0$. よって, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = 0$.

(4) $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ とおけば, (2) の結果を用いて, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. 実は, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ も成り立つ. また, (3) の結果を用いて, $x \to 0$ のとき,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{\varphi(x)-\psi(x)} = \frac{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+1}{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-1} \to -1, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\varphi'(x)+\psi'(x)}{\varphi'(x)-\psi'(x)} = \frac{1+\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}}{1-\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}} \to 1.$$

よって, $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = -1 \ne 1 = \lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

レポート問題

(1) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ だから，$f'(x) = 0$ となる x は $\sqrt{4-x^2} = 1$ の解，すなわち，$x = \pm\sqrt{3}$ である．増減表を書いてもよいが，2 階導関数 $f''(x) = \dfrac{-x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ の値を調べると $f''(\pm\sqrt{3}) = \mp\sqrt{3}$ となるから，$x = \sqrt{3}$ で $f'' < 0$ であり極大，$x = -\sqrt{3}$ で $f'' > 0$ であり極小となる．以上をまとめると，$\boxed{x = \sqrt{3} \text{ で極大値 } \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{6}，x = \sqrt{3} \text{ で極小値 } \dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}}$.

(2) (i) $\log(1-x) - \log(1+x) \xrightarrow{x\to 0} 0$，$xe^x \xrightarrow{x\to 0} 0$．$\dfrac{d}{dx}(\log(1-x) - \log(1+x)) = \dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-2}{1-x^2} \xrightarrow{x\to 0} -2$，$(xe^x)' = e^x + xe^x \xrightarrow{x\to 0} 1$ であることから，ロピタルの定理が使えて $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{xe^x}\log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1-x)-\log(1+x)}{2xe^x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{-2}{1-x^2}}{2(e^x+xe^x)} = \boxed{-1}$.

(ii) $(\mathrm{Sin}^{-1}x - \mathrm{Tan}^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1+x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$．$(\mathrm{Sin}^{-1}x - \mathrm{Tan}^{-1}x)'' = \dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$．さらに，

$$\begin{aligned}(\mathrm{Sin}^{-1}x - \mathrm{Tan}^{-1}x)''' &= \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x)}{(1-x^2)^3} - \frac{2(1+x^2)^2 - 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}\\ &= \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \xrightarrow{x\to 0} 3.\end{aligned}$$

従ってロピタルの定理を繰り返し使うことで，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x - \mathrm{Tan}^{-1}x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\left(\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$