

数学演習第一 演習第8回 【解答例】

線形：正則行列，逆行列，2次または3次の行列式 (2025年6月25日 実施)

演習問題

1 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とする.

(1) $|A| = ad - bc$ (2) $A\tilde{A} = (ad - bc)E_2$

(3) $|A| = ad - bc \neq 0$ なので, $C = (ad - bc)^{-1}\tilde{A}$ とおけば, (2) より $AC = E_2$ となる. よって, III より A は正則であり $A^{-1} = C$.

(4) $|AB| = \begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg)$
 $= (acef + adeh + bcfg + bdgh) - (acef + adfg + bceh + bdgh)$
 $= ad(eh - fg) + bc(fg - eh) = (ad - bc)(eh - fg) = |A||B|.$

(5) $|A| \neq 0$ ならば A は正則であることは (3) で示したので, その逆を示す. A が正則のとき I より, $AD = E_2$ となる行列 D が存在する. 両辺の行列式を取って, 左辺に対して (4) を用いれば, $|A||D| = |E_2| = 1$ となる. $|A| = 0$ とすれば $|A||D| = 1$ に矛盾するので, $|A| \neq 0$ が成り立つ.

2 (1) $\begin{vmatrix} e^x & -1 \\ 0 & e^y \end{vmatrix} = e^{x+y} \neq 0$ なので IV より正則であり, IV より逆行列は $e^{-x-y} \begin{bmatrix} e^y & 1 \\ 0 & e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{-x-y} \\ 0 & e^{-y} \end{bmatrix}.$

(2) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$ なので IV より $\lambda \neq 1$ のとき正則.

$\lambda \neq 1$ のとき, IV より逆行列は $\frac{1}{(\lambda - 1)^2} \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}.$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 3 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4} \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} + 3 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

よって, V より正則でない.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} + 2 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 3 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1} - \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \times \textcircled{3}]{\textcircled{2} + \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

よって, V より正則であり, 逆行列は $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$

$$\begin{aligned}
(5) \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{を行基本変形により簡約行列に変形すると} \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1) \times \textcircled{3}]{(-1) \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4} - \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[\textcircled{4} + \textcircled{3}]{\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{よって, 正則であり逆行列は} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3 (1) $\lambda = 2$, $A = E_2$ とすれば, $|\lambda A| = 4$ だが $\lambda|A| = 2$ となる. よって, 成り立たない.

(2) **1** (4) より $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$ が成り立つ.

(3) $A = B = E_2$ とすれば, $|A + B| = 4$, $|A| + |B| = 2$ となる. よって, 成り立たない.

(4) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると, $|{}^t A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$ が成り立つ.

(5) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ であり,

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|^2} \cdot (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = \frac{1}{|A|^2} \cdot |A| = |A|^{-1}$$

が成り立つ.

4 (1) $[A \ B]$ を簡約行列に変形すると,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} - 3 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 6 & -6 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[\textcircled{3} - \textcircled{2}]{\textcircled{1} - \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\text{よって, } X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 11 \\ 7 & -6 & -9 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) 両辺の転置をとると, ${}^t A {}^t Y = {}^t B = -B$ となる. $[{}^t A \ -B]$ を簡約行列に変形すると,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[\textcircled{3} + 2 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1 \times \textcircled{3}]{\textcircled{1} + \textcircled{3}, \textcircled{2} + \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\text{よって, } {}^t Y = -{}^t A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -6 & 15 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \text{ となるので, } Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & 5 \\ -2 & 15 & -10 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{5} \quad (1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 1 - 8 - 27 = -18. \quad (2) \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 4 & 5 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

$$(3) \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

$$\boxed{6} \quad (1) \text{ 直交行列であることは計算して } {}^t P P = E_2 \text{ を示せばよい. 逆行列は } P^{-1} = {}^t P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

(2) 直交行列であることは計算して ${}^t Q Q = E_3$ を示せばよい. 逆行列は

$$Q^{-1} = {}^t Q = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(3) D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \sin \theta \end{bmatrix} \text{ とおくと } R = QD \text{ となり, 仮定 } r \sin \theta \neq 0 \text{ により } D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{bmatrix}.$$

よって, ${}^t R = {}^t D {}^t Q = D Q^{-1}$ であり,

$$\begin{aligned} ({}^t R)^{-1} &= Q D^{-1} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \\ \sin \theta \sin \varphi & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{7} \quad (1) |\mathbf{a} \ \mathbf{b}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -26 \text{ より, } S = |-26| = 26. \quad (2) T = \frac{S}{2} = 13.$$

$$(3) |\mathbf{p} \ \mathbf{q} \ \mathbf{r}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14 \text{ より, } V = |-14| = 14. \quad (4) W = \frac{V}{6} = \frac{7}{3}.$$

レポート問題

(1)

(i) A の行列式を求める.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & k & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - k - 4k - 16 + 8 + 4 = -5k - 2$$

である. よって A が正則となる条件は, $|A| \neq 0$ より, $k \neq -\frac{2}{5}$.

(ii) $k = -1$ のとき, $[A|E_3]$ を行基本変形で簡約行列まで変形すると

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -8 & 3 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{14}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

となる. よって, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{14}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -5 & -14 & 6 \\ -2 & -8 & 3 \end{bmatrix}.$

(2) 直接計算するなら

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3 - ab^2 + b^2c - ac^2 + b^2c - ab^2 \\ & = a(a^2 - c^2) - 2b^2(a - c) = (a - c)(a^2 + ac - 2b^2). \end{aligned}$$

となるが, もとの行列式で 1 行目と 3 行目は $a = c$ のとき一致することに注目すると, 求める行列式は $a - c$ で割り切れるはずである. これを意識し, 第 1 行から第 3 行を引いても行列式の値が変わらないことに注意して, $a - c$ をくくり出し

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & 0 & c-a \\ b & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix} = (a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ b & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix} \\ & = (a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 2b \\ 0 & b & a+c \end{vmatrix} = (a-c) \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a+c \end{vmatrix} = (a-c)(a^2 + ac - 2b^2) \end{aligned}$$

とやる方がよい.