

数学演習第一（演習第9回）【解答例】

微積：漸近展開, 積分の計算 (1) 2025 年 7 月 2 日

要点（漸近展開の要点）

空欄の中身は並んでいる順に

$$\boxed{\frac{1}{n!}}, \quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}, \quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}, \quad \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}, \quad \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}, \quad \boxed{(-1)^n}.$$

演習問題

1 (本問でランダウの記号 $o(x^n)$ を使うときはいつも, $x \rightarrow 0$ が省略されている.)

(1) (d) ($\alpha = -\frac{1}{2}$) を用いて, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + o(x^2) = \boxed{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)}.$

(2) (d) ($\alpha = \frac{1}{2}$) を用いて, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + o(x^2) = \boxed{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}.$

(3) (a) より $e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \pm \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \boxed{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}.$$

【注意】 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7),$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^7),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7).$$

(4) (a) を用いて, $3^x = (e^{\log 3})^x = e^{(\log 3)x} = \boxed{1 + (\log 3)x + \frac{(\log 3)^2}{2}x^2 + o(x^2)}.$

(5) (c) より, $\log(2+x) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = \boxed{\log 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}.$

(6) 部分分数分解した後に (d) ($\alpha = -1$) を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x-2x^2} &= \frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left\{2(1+2x+(2x)^2+(2x)^3+o(x^3)) + (1-x+x^2-x^3+o(x^3))\right\} = \boxed{1+x+3x^2+5x^3+o(x^3)}. \end{aligned}$$

《別法》 $\frac{1}{1-x-2x^2} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-2x} = (1-x+x^2-x^3+o(x^2))(1+2x+(2x)^2+(2x)^3+o(x^2))$
 $= 1+x+3x^2+5x^3+o(x^3).$

(7) (b) より $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6), \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$ これを用いて,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720} + o(x^6)\right)\right\} = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6).$$

よって, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{x^2} = \boxed{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)}.$

《別法》 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4).$

(8) (a), (b) を用いて, $e^{-x} \cos x = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \boxed{1 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}.$

(9) (b) より $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 + (-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4))}$. ここで, $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$ ($X \rightarrow 0$) を用いて,

$$\frac{x}{\sin x} = 1 - \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)\right) + \left(-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) = \boxed{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)}.$$

(10) $\cos x = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$ ($x \rightarrow 0$), $e^{1+X} = e \cdot e^X = e\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$ ($X \rightarrow 0$) より,

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e \left\{ 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \right\} \\ &= e \left\{ 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right\} + o(x^4) = \boxed{e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)}. \end{aligned}$$

(11) (c) より, $\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \{ \log(1+x) - \log(1-x) \} = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}.$$

あるいは積分表示 ($(\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}})' = \frac{1}{1-x^2}$ を確認せよ) を用いて,

$$\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x (1 + t^2 + t^4 + o(t^4)) dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

$$(12) \quad \text{Tan}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 + o(t^4)) dt = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}.$$

【注意】 $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \text{Tanh}^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + o(x^7)$, $\leftarrow \tanh x$ の逆関数

$$\text{Tan}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7).$$

(13) (1) の結果から, $\frac{1}{\sqrt{1 \pm t^2}} = (1 \pm t^2)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + o(t^4)$ (複号同順). これを用いて,

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + o(t^4)\right) dt = \boxed{x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}.$$

(14) (13) と同様にして,

$$\text{Sin}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + o(t^4)\right) dt = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}.$$

【注意】 $\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \text{Sinh}^{-1} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + o(x^7)$, $\leftarrow \sinh x$ の逆関数

$$\text{Sin}^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^7).$$

2 (1) (i) 分母が x^3 であるから, 分子を $o(x^3)$ を用いて表す.

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + \frac{1}{6}(x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \frac{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))}{x^3} = \frac{1}{6} + o(1) \rightarrow \boxed{\frac{1}{6}} \quad (x \rightarrow 0).$$

あるいは, $\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = e^{\sin x} \cdot \frac{e^{x-\sin x} - 1}{x - \sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^3}$ と変形して,

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^3} = \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} \rightarrow \frac{1}{6} \quad (x \rightarrow 0)$$

を用いればよい.

(ii) 分母は $x(x - \sin x) = \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$ となるから, 分子に対する 4 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\begin{aligned} e^{-2x^2} - \cos 2x &= \left(1 + (-2x^2) + \frac{1}{2}(-2x^2)^2 + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4)\right) \\ &= \left(1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) = \frac{4}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x(x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 + o(1)}{1 + o(1)} = \boxed{8}.$$

(iii) 対数をとって考える. $\log\left(\frac{x}{\tanh x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\log \frac{x}{\tanh x}}{x^2}$ において, 分母が x^2 だから, 分子を $o(x^2)$ で表す.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\tanh x} &= \frac{x \cosh x}{\sinh x} = \frac{x(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)} \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\log \frac{x}{\tanh x} = \log\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \left(\frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + o(x^2) = \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow 0} \log\left(\frac{x}{\tanh x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{x}{\tanh x}}{x^2} = \frac{1}{3} \quad \text{となり, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\tanh x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \boxed{e^{1/3}}.$$

$$\begin{aligned} (2) \log(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \quad \text{であるから, } (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \\ &= e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \left\{ 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) \right\} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2). \quad \text{故に, } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \boxed{e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \quad (n \rightarrow \infty). \quad \text{《補足》同様に, } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e + \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

3

(1) (不定積分に対する積分定数は省略した.)

(i) 被積分関数を部分分数分解して,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \boxed{\log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1)} = \boxed{\frac{1}{2} \log \frac{x^2}{x^2+1}}.$$

(ii) 部分積分法により,

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - \int x \cdot \frac{2 \log x}{x} dx = x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1) = \boxed{x \{ (\log x)^2 - 2 \log x + 2 \}}. \end{aligned}$$

(iii) $x^2 = t$ とおけば $x dx = \frac{dt}{2}$ であるから,

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int t e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \left(-t e^{-t} + \int e^{-t} dt \right) = -\frac{1}{2} (t+1) e^{-t} = \boxed{-\frac{1}{2} (x^2+1) e^{-x^2}}.$$

(iv) $\cos x = t$ とおけば $-\sin x dx = dt$ であるから,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{-dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-t}{1+t} \right| = \boxed{\frac{1}{2} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \boxed{\log \left| \tan \frac{x}{2} \right|}. \end{aligned}$$

(v) 部分積分法により,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} + 2 \left[x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2}.$$

(vi) 部分積分法により, $I := \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{\pi} -$

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-\pi} + 1 - I. \quad \text{よって, } I = \boxed{\frac{1 + e^{-\pi}}{2}}.$$

(vii) $\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x| dx = \int_0^{\pi} \left| \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x| dx$

$$= \sqrt{2} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} (-\sin x) dx \right) = \sqrt{2} \left(\left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \left[\cos x \right]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right\} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

《別法》 $|\sin x|$ は周期 π の関数であるから, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$

(viii) $I_{m,n} = \int_0^\pi \cos mx \cos nx \, dx$ とおく ($m, n \in \mathbb{N}_0$). $m \neq n$ のとき, 三角関数の積和の公式により,

$$I_{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\} \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_0^\pi = \boxed{0}.$$

$m = n \geq 1$ のとき, $I_{n,n} = \int_0^\pi \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$

$m = n = 0$ のとき, $I_{0,0} = \int_0^\pi dx = \boxed{\pi}.$

(2) (i) $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ とおけば, $\frac{1}{x-1} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t) \, dt = \frac{F(x^2) - F(\sqrt{x})}{x-1}$ ($x \rightarrow 1$ のとき $\frac{0}{0}$ 型の不定形) であるから, ロピタルの定理 (あるいは微分の定義) により,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ 2xF'(x^2) - \frac{F'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \right\} = \boxed{\frac{3}{2}f(1)}.$$

(ii) 連続関数 $h(x)$, 定数 c に対し, $\frac{d}{dx} \int_c^x h(t) \, dt = h(x)$ (微積分の基本定理) が成り立つことに注意する.

$$G(x) = x^2 \int_0^x f(t) \, dt - 2x \int_0^x tf(t) \, dt + \int_0^x t^2 f(t) \, dt,$$

$$G'(x) = 2x \int_0^x f(t) \, dt + x^2 \cdot f(x) - 2 \int_0^x tf(t) \, dt - 2x \cdot xf(x) + x^2 f(x)$$

$$= 2 \left(x \int_0^x f(t) \, dt - \int_0^x tf(t) \, dt \right),$$

$$G''(x) = 2 \left(\int_0^x f(t) \, dt + x \cdot f(x) - xf(x) \right) = 2 \int_0^x f(t) \, dt. \quad \text{よって, } G'''(x) = \boxed{2f(x)}.$$

《補足》一般に, 自然数 n に対して, $F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt$ とおけば, $F_n^{(n)}(x) = f(x)$ が成り立つ.

レポート問題

(1) (i) 一般二項展開を適用する.

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-\frac{1}{3}} &= 1 - \frac{1}{3}(-x^2) + \binom{-\frac{1}{3}}{2}(-x^2)^2 + \binom{-\frac{1}{3}}{3}(-x^2)^3 + o(x^6) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{(-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{3})}{2}x^4 - \frac{(-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot (-\frac{7}{3})}{3!}x^6 + o(x^6) \\ &= \boxed{1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + \frac{14}{81}x^6 + o(x^6)} \end{aligned}$$

(ii) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ を使うと, (特に 4 次の項は下記第 2 項の全ての項から現れることに注意して)

$$\begin{aligned} \log(1 + \log(1+x)) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^2}{2} \right)^3 - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= \boxed{x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{35}{24}x^4 + o(x^4)} \end{aligned}$$

(2) (i) $\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $x \cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ であることを用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{\sin^{-1}(2x)} - \frac{1}{2x \cos x} \right\} &= \frac{2x \cos x - \sin(2x)}{x \sin^{-1} 2x \cdot 2x \cos x} = \frac{(2x - x^3) - (2x + \frac{4}{3}x^3) + o(x^3)}{x(2x)(2x) + o(x^3)} \\ &= \frac{-\frac{7}{3}x^3 + o(x^3)}{4x^3 + o(x^3)} \rightarrow \boxed{-\frac{7}{12}} \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

(ii) $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $x \cosh x = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ および $\tan^{-1} x = x + o(x)$ であることを用いると

$$\frac{\sinh x - x \cosh x}{(\tan^{-1} x)^3} = \frac{x + \frac{x^3}{6} - \left(x + \frac{x^3}{2} \right) + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{3}} \quad (x \rightarrow 0)$$