

数学演習第一 (演習第 1 回)

微積：極限值, 逆三角関数

2025 年 4 月 23 日

要点

基本的な極限值

- 三角関数: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- 指数・対数関数: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \left(\Leftrightarrow e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$

逆三角関数

- $y = \text{Sin}^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y \quad \left(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$
- $y = \text{Cos}^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y \quad (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$
- $y = \text{Tan}^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y \quad \left(x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

【演習中に扱う予定の問題】: 1(6)(12), 2, 3, 5(2)

1 次の極限值を求めよ. (演習書 問題 2.2.1 (2), (6), (7), (8), (11), (12), (13), (14))

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} \quad (ab \neq 0)$

(6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x)}{\tan x}$

(11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

(12) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(14) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}$

- (12), (13) については, まず対数をとった関数の極限值を求めよ.

2 次の値を求めよ. (演習書 問題 2.3.1 [改題])

(5) $\sin(\text{Tan}^{-1}(-2))$

(6) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$

3 次の方程式を解け. (演習書 問題 2.3.3 [一部改題])

(1) $\text{Cos}^{-1} x = \text{Tan}^{-1} 3$

(2) $\text{Sin}^{-1} x + 2 \text{Sin}^{-1} \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$

(3) $\text{Tan}^{-1} x + 2 \text{Tan}^{-1} \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4}$

4 次の関係式を示せ。(演習書 問題 2.3.4 [改題])

$$(1) \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \qquad (2) \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0)$$

※ 2, 3 のような問題では, 数値として確定している部分を α などとおいてみるのがよい.

例えば, 3 (1) では, $\alpha = \tan^{-1} 3$ とおくと, α は $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ かつ $\tan \alpha = 3$ をみたし, 問題の方程式は $\cos^{-1} x = \alpha$ と表される. よって, 方程式の解 x は, 上の条件をみたす α に対する, $\cos \alpha$ の値として与えられる.

5 双曲線関数

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ.

但し, $\cosh^2 x = (\cosh x)^2$, $\sinh^2 x = (\sinh x)^2$ (三角関数と同様な記法).

(2) $y = \sinh x$ および $y = \tanh x$ の逆関数をそれぞれ求めよ.

(3) $y = \cosh x$ ($x \geq 0$) および $y = \cosh x$ ($x \leq 0$) の逆関数をそれぞれ求めよ.

演習第 1 回 レポート問題

(1) $\cos^{-1} \left(\sin \frac{8\pi}{7} \right)$ の値を求めよ.

(2) $\sin \left(2 \cos^{-1} \frac{1}{3} \right)$ の値を求めよ.

(3) $\tan^{-1} x + 2 \cos^{-1} \frac{1}{3} = \pi$ が解を持つことを示し, x を求めよ.