

数学演習第一（演習第 10 回）

線形：4 次以上の行列式

2025 年 7 月 9 日

【要点】

演習第 8 回で 2 次, 3 次の行列式を公式に従って計算した. 今回は 4 次以上の行列式の計算法を学習する. まず, 行列式を定義する準備として, 次の記号を用意する.

〈 A_{ij} の定義〉 (線形教科書 p.80)

n 次正方行列 A の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と記す.

◎ 例えば $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ であるなら $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

これを用いて n 次の行列式を n に関して帰納的に定義する.

〈行列式の定義〉 (線形教科書 p.65)

1×1 行列 $A = [a]$ に対して $|A| = a$ とする. $n-1$ 次正方行列に対して行列式が定義できたとき, n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の行列式 $|A|$ を次で定義する.

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + (-1)^{2+1}a_{21}|A_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|$$

定義を直接適用して行列式を計算すると, 例えば A が 4 次の行列式だと右辺に 3 次の行列式が 4 つ出てきて計算が複雑になる. そのため, 次の定理を用いて計算することが多い.

〈行列式と行基本変形との関係〉 (線形教科書 p.68)

n 次正方行列 A の行ベクトル分割を $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ とするとき行列式 $|A|$ は次を満たす.

(1) ある i について $\mathbf{a}_i = c\mathbf{b}_i$ ならば,

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ c\mathbf{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

(2) 2 つの行 $\mathbf{a}_i$ と $\mathbf{a}_j$ を入れ換えると, 行列式は -1 倍される:

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

(3) $i \neq j$ のとき, $\mathbf{a}_j$ に $\mathbf{a}_i$ の c 倍を加えても行列式は変わらない:

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + c\mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

◎ 例えば $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ の行列式は次のように計算できる.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -6 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -6 & -2 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5.$$

これ以外の行列式に関する主要な定理を挙げる.

〈行列式に関する定理〉 A, B は n 次正方行列とする. このとき次が成立する.

- (1) A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.
- (2) $|AB| = |A||B|$. 特に, A が正則行列のとき $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.
- (3) $|{}^tA| = |A|$.

(3) の性質のおかげで, 行列式と行基本変形との関係は列基本変形に対しても成立する.

A の余因子行列についても述べておく.

〈余因子の定義〉 (線形教科書 p.81)

n 次正方行列 A に対し $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ を A の (i, j) 余因子 という.

◎ 例えば $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ であるなら $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ であるので $(2, 2)$ 余因子は $(-1)^{2+2}|A_{22}| = 3$.

〈余因子展開〉 (線形教科書 p.81)

余因子を用いて行列式を“展開”することができる.

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}| \quad (\text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開}) \\ &= (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| \quad (\text{第 } i \text{ 行に関する余因子展開}). \end{aligned}$$

第 1 列に関する余因子展開は上述の行列式の定義の中に現れる.

〈余因子行列の定義〉 (線形教科書 p.83)

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対し, (i, j) 成分が (j, i) 余因子であるような n 次正方行列を A の余因子行列といい $\tilde{A}$ で表す. したがって $\tilde{A}$ の (i, j) 成分は $(-1)^{j+i}|A_{ji}|$ である.

◎ 例えば $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ に対しては $\tilde{A} = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix}$

〈余因子行列の性質〉 (線形教科書 p.83)

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E. \quad \text{特に, } |A| \neq 0 \text{ ならば, } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

【演習中に扱う予定の問題】： $\boxed{1}(1)(3)(5), \boxed{3}(2)(4), \boxed{4}(2), \boxed{5}(1), \boxed{6}(1)$

- 1** 次の行列に対して、行列式の値を求めよ．((1) は演習書問題 9.3.2 (3); (2), (3), (4) は演習書問題 9.3.3) 【注】線形教科書例題 10.7 が基本．線形教科書 p.77 にある列基本変形も有効．

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- 2** n 次正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$, n 次単位行列を E とする．

(1) $|dE|$ (d はスカラー) を d を用いて表せ． (2) $|\tilde{A}|$ を $|A|$ を用いて表せ．

(3) $\boxed{1}$ の (4), (5) の行列に対して、その余因子行列の行列式の値を求めよ．

((2) のヒント：恒等式 $A\tilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって、左辺には線形教科書定理 11.3, 右辺には (1) を適用.)

- 3** 4 次正方行列 A の行ベクトル分割を $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ とし、 A の行列式の値を $|A| = -2$ とする．このとき、

次の行列式の値を求めよ．

$$(1) \begin{vmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} b \\ -d \\ 3a \\ -2c \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 10b \\ a+b \\ a-b \\ c+d \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 2a \\ -3b \\ -5b+4c \\ 7a-d \end{vmatrix}$$

- 4** A を n 次の正則行列, $\mathbf{b}$ を n 次列ベクトルとする．

(1) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ を変数とする連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ ($i = 1, \dots, n$) で与えられる

ことを示せ．ここで A_i は A の第 i 列を $\mathbf{b}$ で置き換えて得られる行列である．(これを **クラメールの公式** という．線形教科書 p.85)

(2) クラメールの公式を用いて次の連立 1 次方程式を解け．(演習書問題 9.4.2 (3), (4))

$$(i) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

5 次の行列式を因数分解した形で求めよ. (この形の行列式を **ヴァンデルモンドの行列式** という.)

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

6 (1) 次の行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求め, さらに A が正則である場合には A^{-1} を求めよ. (演習書問題 9.4.1 (4))

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列式を展開せよ. (演習書問題 9.3.6 (6))

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & x & & & O \\ x & x^2+1 & x & & \\ & x & x^2+1 & x & \\ & & x & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & x \\ O & & & & x & x^2+1 \end{vmatrix} \quad (n \text{ 次})$$

演習第 10 回 レポート問題

(1) 次の 2 つの行列 A, B を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -3 & 9 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \\ 8 & 5 & -8 & -9 \\ 3 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

(i) 行列式 $|A|$ および $|B|$ の値を求めよ.

(ii) A の余因子行列 $\tilde{A}$ の $(4, 1)$ -成分を求めよ. さらにそれを用いて, A^{-1} の $(4, 1)$ -成分を求めよ.

(2) x_1, x_2, x_3 を相異なる実数とする. 平面上の 3 点 $(x_1, 4), (x_2, 1), (x_3, 2)$ を通る 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える. クラメル公式とヴァンデルモンドの行列式を用いて, a を x_1, x_2, x_3 の式で表せ.