

数学演習第一 (演習第2回)

線形：平面の方程式, 行列の演算

2025 年 5 月 7 日

要点1

《表記上の注意》

- 高校ではベクトルを $\vec{p}$ (矢印) の形で表したが, ここでは $\mathbf{p}$ (太字) と表記する. 零ベクトルは $\mathbf{0}$ で表す.
- ベクトル $\mathbf{p}$ に対して, 「点 $\mathbf{p}$ 」は $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ (O は原点) となる点 P を表す ($\mathbf{p}$ は点 P の位置ベクトル).

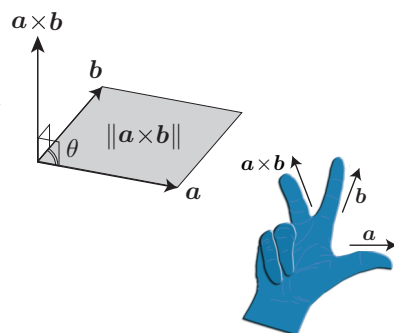
I 空間ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ をそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の内積, $\mathbf{a}$ の長さ (大きさ, ノルム) という. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ が成り立つ. (平面ベクトルの場合も同様.)
- $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{b}$ は $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''$ ($\mathbf{b}' = k\mathbf{a}$, $\mathbf{b}'' \cdot \mathbf{a} = 0$) の形に分解できる. このとき, $\mathbf{b}'$ を $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に平行な直線」への正射影, $\mathbf{b}''$ を $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に垂直な平面」への正射影と呼ぶ. (平面ベクトルの場合, $\mathbf{b}''$ は $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に垂直な直線」への正射影となる.)

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の外積 (= ベクトル積) と呼ぶ.

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ が平行でないとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を $\theta \in (0, \pi)$ とすれば,

- ① $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方に垂直,
- ② $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は右手系,
- ③ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が作る平行四辺形の面積).

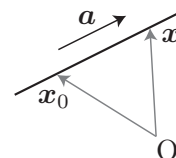


II 空間の点 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対して,

- 点 $\mathbf{x}_0$ を通り, $\mathbf{a}$ を方向ベクトルとする直線 ($\mathbf{a}$ に平行な直線) の方程式は,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \text{ より, } \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

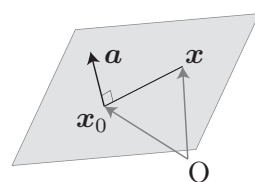
(右上の表現は $abc \neq 0$ の場合の形. 例えば $ab \neq 0, c = 0$ なら, $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, z = z_0$ となる.)



- 点 $\mathbf{x}_0$ を通り, $\mathbf{a}$ を法線ベクトルとする平面 ($\mathbf{a}$ に垂直な平面) の方程式は,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0, \text{ すなわち } \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

(右上の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)



要点2

- $l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B に対して, $l \times n$ 行列 AB (A, B の積) が次により定義される: AB の (i, j) 成分は A の第 i 行と B の第 j 列の「内積」である. また, B の (i, j) 成分を (j, i) 成分とする $n \times m$ 行列を B の転置行列と呼び, tB で表す.
- 同じサイズの正方行列 A, B に対して, 積 AB, BA が定義されるが, 数の場合と異なり, 「 $AB = BA$ 」 「 $AB = O \Rightarrow A = O$ or $B = O$ 」 が成り立つとは限らない.
- 正方行列 A に対して, $AB = BA = E$ (E は単位行列) を満たす B が存在するとき (存在すれば一意), B を A の逆行列と呼び, A^{-1} で表す. また, 逆行列をもつ行列を正則行列という. 2 次正方行列では

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ が正則 } \Leftrightarrow ad - bc \neq 0. \text{ このとき, } A \text{ の逆行列は } \boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}.$$

【演習中に扱う予定の問題】：3(2)(3), 4, 6

1 ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下を計算せよ. ((4), (5) については線形第1節参照)

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (2) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角 (3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (4) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積 ($= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$)
 (5) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る平行六面体の体積 ($= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$) (6) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る四面体の体積

2 空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, かつ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は平行でない) に対して, 次の主張を示せ.

- (i) $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に平行な直線」への正射影は $\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$, その長さは $\|\mathbf{b}'\| = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|}$.
 (ii) $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に垂直な平面」への正射影は $\mathbf{b}'' = \mathbf{b} - \mathbf{b}' = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$, その長さは $\|\mathbf{b}''\| = \frac{\|\mathbf{b} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}$.

更に, 1 の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して, 以下を計算せよ.

- (7) $\mathbf{c}$ の「 $\mathbf{a}$ に平行な直線」への正射影 (8) $\mathbf{c}$ の「 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に平行な平面」への正射影

3 空間の3点 $A(1, 2, 0)$, $B(2, -1, 2)$, $C(-1, 0, 1)$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 2点 A, B を通る直線 (直線 AB と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{AB}$ が方向ベクトル)
 (2) 3点 A, B, C を通る平面 (平面 ABC と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ が法線ベクトル)
 (3) 原点 O から平面 ABC に下ろした垂線の長さを求めよ.
 (4) 点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ.

4 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ.

- (1) $2A - 3B$ (2) $2X + 3A = B$ を満たす行列 X (3) BC (4) $A^t C^t B$

5 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の逆行列, 正則性について考える.

- (1) $(A - aE)(A - dE)$ (E は2次単位行列) を計算して, 次の関係式を導け:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O.$$

- (2) $\tilde{A} := (a+d)E - A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおくとき, (1) の関係式から, $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad-bc)E$ を導け.

- (3) (2) で導いた関係式を用いて, 次の主張を示せ.

- ① $ad - bc \neq 0$ ならば, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \tilde{A} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
 ② $ad - bc = 0$ ならば, A は正則でない.

6 2次正則行列の逆行列の公式を用いて, 次の問いに答えよ.

- (1) 次の行列の逆行列を求めよ: ① $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$, ② $\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$ ($r \neq 0$).

- (2) $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ のとき, $AX + 2B = BA$ を満たす行列 X を求めよ.

7 次を満たす 2 次正方行列 P, Q_θ, R_θ を定めよ.

(1) 点 (x, y) を x 軸に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(2) 点 (x, y) を原点の周りに θ だけ回転移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ. 【ヒント】複素数平面上で考えれば, $x' + iy' = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy)$ と書ける.

(3) x 軸を原点の周りに θ だけ回転移動した直線を ℓ_θ とする. 点 (x, y) を ℓ_θ に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

【ヒント】点 (x, y) を, まず原点の周りに $-\theta$ だけ回転移動し (この回転移動で ℓ_θ は x 軸に重なる), 次に x 軸に関して対称移動し, 最後に原点の周りに θ だけ回転移動すれば点 (x', y') が得られる.

演習第 2 回 レポート問題

(1) 空間内の 3 点 $A(1, 2, -1), B(-2, 3, 4), C(3, -1, 2)$ とする.

(i) 外積 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を求め, 平面 ABC の方程式を求めよ.

(ii) 点 $P(1, 1, 1)$ を通り, 方向ベクトルが $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ である直線 ℓ の方程式を求めよ.

(iii) 直線 ℓ と平面 ABC の交点の座標を求めよ.

(2) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ とする. $XY, YX, XY^tX, Y^tXY, X^tY^tX$ のうちで積が定義されているものをすべて挙げ, それぞれ積を求めよ.