数学演習第一（演習第 4 回）

線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数

2025 年 5 月 21 日

要点

(1) 行列 A の行ベクトル分割を $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}$ とする．A が次の 4 条件をみたすとき**簡約行列**とよぶ. (ただし, ここでは非零行ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の一番左にある 0 でない成分を $\boldsymbol{a}_i$ **の主成分**とよぶ.)

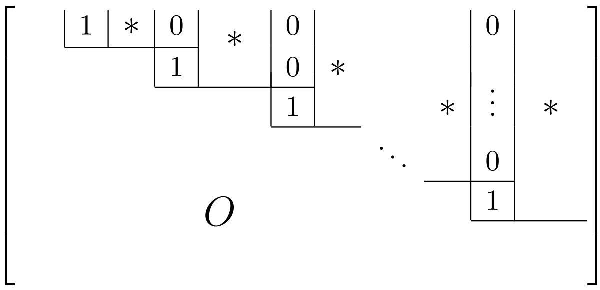
(i) $\boldsymbol{a}_i$ のうち零ベクトル $\mathbf{0}$ があれば, それらは下に集まっている.

(ii) $\boldsymbol{a}_i \neq \mathbf{0}$ なら $\boldsymbol{a}_i$ の主成分は 1 である.

(iii) 各行の主成分は下の行ほど右にある.

(iv) 主成分を含む列の主成分以外の成分はすべて 0 である.

すなわち, 簡約行列とは次の形の行列のことである (O のある区画の成分はすべて 0 であり, $*$ にはどんな列数 (0 でも可) の行列が入ってもよい):



(2) 行列に対する以下の 3 種類の操作を**行基本変形**という.

(R1) 第 i 行を c 倍する（ただし $c \neq 0$）. この操作を $c \times ⓘ$ と書く.

(R2) 第 i 行と第 j 行を入れ換える. この操作を $ⓘ \leftrightarrow ⓙ$ と書く.

(R3) 第 i 行に第 j 行の c 倍をたす. この操作を $ⓘ + c \times ⓙ$ と書く.

(3) 任意の行列 A に対して,

- A は有限回の行基本変形によって簡約行列に変形することができる.
- 得られる簡約行列は, 行基本変形のやり方によらず A から一意的に決まる.
- A を簡約行列に変形したときの主成分の個数を A の**階数**といい, $\mathrm{rank}\, A$ で表す.
- A が $m \times n$ 行列ならば $\mathrm{rank}\, A \leq m$ かつ $\mathrm{rank}\, A \leq n$ が成り立つ.

[例題] 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ を何回かの行基本変形で簡約行列に変形せよ.

[解]

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-5\times②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

【演習中に扱う予定の問題】： $\boxed{3}$(1)(2)(3), $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$(1)

$\boxed{1}$ 次の行列が簡約行列ではない理由として, 要点 (1) の (i)〜(iv) のどれに反するかを全て選んで答えよ. さらに, 何回かの行基本変形で簡約行列に変形せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ 以下は任意の行列を簡約化できる一つの手順である:

(a) 初めは第 1 行に注目する.

(b) 注目する行かそれより下の行のうち, 主成分が一番左にある行 (複数ある場合は後で主成分を 1 とするのに都合のよい行) を (R2) を用いて注目する行と交換する (動かさない場合もある).

(c) その主成分が 1 でなかったら注目する行に (R1) (または (R3)) を適用して 1 にする.

(d) その主成分がある列に (その主成分以外で) 0 でない成分があれば (R3) を用いて 0 にする.

(e) 注目する行より下の行にある成分が全て 0 なら終了. そうでなければ注目する行を 1 つ下げて (b) に戻る.

下の行列について, この手順に従って簡約化を行った. 空欄を埋めよ (記法は要点 (2) に従うこと).

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ 次の行列を何回かの行基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 7 & 11 & 5 \\ 3 & 16 & 10 & 15 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ 行列 A に行基本変形を (何回か) 施した結果が B となるとき, $MA = B$ を満たす正則行列 M (**基本行列**の積で表される) が存在する (線形教科書 pp. 43–46 参照). 以下の「行基本変形 (の繰り返し)」について, M に相当する行列を記せ.

[例]　2×2 行列に対して,「第 1 行と第 2 行を入れ換え, 次に第 2 行を -3 倍する」

[解]　基本行列は 2×2 型, $A \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \bullet \xrightarrow{(-3)\times②} B$ なので, $B = P_2(-3)P_{12}A$. 従って,

$$M = P_2(-3)P_{12} = P_2(-3)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで, P_{12}, $P_2(-3)$ は, 基本行列を表す記号 (教科書 p. 43).

(1) 3×2 行列に対して, 「第 1 行に第 2 行の 3 倍を加える」

(2) 4×3 行列に対して, 「第 2 行と第 3 行を入れ換え, 次に第 4 行を -2倍する」

$\boxed{5}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$ $\Big($問題 $\boxed{3}$ の (1)$\Big)$, その簡約行列を B としたとき, $MA = B$ となる行列 M を 1 つ求めよ.

6 次の行列の階数を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} a & a \\ a-1 & 1 \\ a-2 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(ヒント: 変数 a, b, c, d を含むので, 場合分けが必要となる場合がある.)

演習第 4 回　レポート問題

(1) 次の 2 つの行列 A, B について，行基本変形を繰り返し行うことにより，(i) 簡約行列に変形せよ．(ii) 階数を求めよ．(iii) 主成分が存在する列をすべて挙げよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 & 9 & -7 \\ 5 & -13 & 15 & 21 & -5 \\ -3 & 9 & -9 & -13 & 7 \\ -2 & 5 & -6 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) $\begin{bmatrix} a & 2a+2 & 5 \\ a+3 & a^2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ．a の値に応じて場合分けが必要である．