数学演習第一（演習第 6 回）

線形：連立 1 次方程式

2025 年 6 月 4 日

要点

〈係数行列, 拡大係数行列〉

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とおき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える. このとき, 行列 A を**係数行列**, $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ を**拡大係数行列**という. 特に, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合 (すなわち $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$) は **同次** 連立 1 次方程式と呼ばれる.

〈連立１次方程式の解〉 $m \times n$ 行列 A の階数を r とする：$r = \operatorname{rank} A$ ($\leqslant \min\{n, m\}$).

$$\begin{array}{ccccc} \text{連立 1 次方程式} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & \overset{\text{同値な連立 1 次方程式}}{\Longleftrightarrow} & C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \\ & \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{拡大係数行列} & \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} & \xrightarrow{\text{簡約化 (行基本変形)}} \cdots\cdots \longrightarrow & \begin{bmatrix} C & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \end{array}$$

- 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} [\, C \;\; \boldsymbol{d} \,], \quad \text{すなわち} \quad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [\, A \;\; \boldsymbol{b} \,] \ (= r)$$

  である. この条件が満たされるとき, $n = r$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は一意であり, $n > r$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $s = n - r$ 個のパラメータ (任意定数) を含む形で表される. C の主成分に対応しない変数をパラメータとするのが標準的な解の表示法である.

- 特に, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合) は $s = n - r$ 個の 1 次独立な解をもつ. この s 個の 1 次独立な解の組を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**と呼ぶ.

〈例〉 連立 1 次方程式 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ \phantom{-x_1 +{}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b \end{cases}$ を解く (a, b は定数).

まず, 拡大係数行列に行基本変形を繰り返して,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & b \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & a+2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{bmatrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ (\text{if } a = 0), \quad \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right] \ (\text{if } a \neq 0).$$

よって, 与えられた連立 1 次方程式は, $b \neq -1$ のとき, 解なし. $a = 0$, $b = -1$ のとき,

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 - x_4 = -1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

に簡約化され, $a \neq 0$, $b = -1$ のとき,

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 \phantom{{}+x_4} = -1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + 2x_3 \phantom{{}+x_4} = 0 \\ \phantom{x_1 + x_2 + 2x_3 +{}} x_4 = 0 \end{cases}$$

に簡約化される. (ここでは, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して, 拡大係数行列 $[A \ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列 $[C \ \ \boldsymbol{d}]$ を拡大係数行列にもつ同値な連立 1 次方程式 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ を考えるとき, 「$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ に簡約化される」「$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を簡約化して $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ を得る」といった言い方をした.) よって, 求める解は, (簡約化して得られた連立 1 次方程式の) 主成分に対応しない変数をパラメータ (任意定数) として選び,

- $a = 0,\ b = -1$ のとき,
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+s+t \\ -2s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$
- $a \neq 0,\ b = -1$ のとき,
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$
- $b \neq -1$ のとき, 解なし.

【演習中に扱う予定の問題】: 1, 2(ii), 3(2), 4(1), 5

1 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ の簡約行列が $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき,

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ として次の問いに答えよ.

(1) $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ を簡約化して得られる連立 1 次方程式を具体的に書け. 主成分に対応する変数は何か.

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け. (主成分に対応しない変数を任意定数を表すパラメータにとる.)

(3) A の簡約行列を書け. また, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解け.

2 次の連立 1 次方程式 (前から順に, 演習書 **問題** 8.2.9 (1), **問題** 8.2.10 (1), (2), (3)) を解け.

(i) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 21 \\ x + 2y + z = 14 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$　　(ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -9 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$　　(iv) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

3 次の連立 1 次方程式を解け (a は実数定数). ((1) は逆行列を, (2) は拡大係数行列の簡約化を用いよ.)

(1) $\begin{cases} (a+1)x + ay = 1 \\ 3x + (a+2)y = -2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 13x_3 + 4x_4 = a \end{cases}$

4 次の同次連立 1 次方程式を解け (係数行列の簡約化を利用). 更に, **基本解**と**解の自由度** (線形教科書 pp.53–56 参照) を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x - y + 9z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

5 ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は定数) について次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が**1次独立** (すなわち $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$) となるような k の条件を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が**1次従属** (すなわち $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ を満たす $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0,0,0,0)$ が存在) となるような k の条件を求めよ. また, そのとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の**非自明な1次関係式** $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ ($(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0,0,0,0)$) を1つ挙げよ.

[**ヒント**] $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$ とおけば, $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ は $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ と書かれる.

6 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とおくとき, 次の問いに答えよ. ここで, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は定数ベクトル, $\boldsymbol{x}$ は変数ベクトルとする.

(1) $a_1 \neq 0$ で, b が定数のとき, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = b$ を解け.

(2) $a_3 \neq 0$ のとき, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形に書き, これが解をもつための条件を求めよ. 更に, その条件が満たされているとき, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け.

演習第 6 回　レポート問題

(1) 連立 1 次方程式 $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$ に対し，拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ が行基本変形によって

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

となったとする. もとの連立一次方程式の一般解を求めよ.

(2) 次の連立 1 次方程式を解け.

(i) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$