

# 数学演習第一（演習第7回）

微積：高次の導関数，テーラーの定理，有限テーラー展開

2025 年 6 月 18 日

## 要点 1

### 1°. $n$ 回微分可能, $n$ 回連続微分可能 ( $C^n$ 級)

- 微分可能 = 1 回微分可能, 導関数 = 1 次導関数と解釈する.  $n \geq 2$  に対して, 帰納的に,  $f(x)$  が  $n-1$  回微分可能で,  $n-1$  次導関数  $f^{(n-1)}(x)$  が微分可能なとき,  $f(x)$  は  $n$  回微分可能であるといひ,  $f^{(n-1)}(x)$  の導関数  $f^{(n)}(x) := \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$  を  $n$  次導関数という.
- $f(x)$  が  $n$  回微分可能で  $n$  次導関数  $f^{(n)}(x)$  が連続のとき,  $f(x)$  は  $n$  回連続微分可能または  $C^n$  級という. (微分可能なら連続ゆえ)  $f(x)$  が  $n$  回微分可能ならば  $C^{n-1}$  級であることが保証される. また,  $f(x)$  が何回でも微分可能なとき,  $f(x)$  は無限回微分可能または  $C^\infty$  級という.

### 2°. ライプニッツ Leibniz の公式

$f(x), g(x)$  が  $n$  回微分可能ならば, 積  $f(x)g(x)$  も  $n$  回微分可能であり, 次の関係式が成り立つ:

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x). \quad (\text{注: } f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'')$$

### 3°. 基本的な関数の $n$ 次導関数

- ①  $(e^x)^{(n)} = e^x$ .    ②  $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .    ③  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .
- ④  $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ .    一般に,  $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$  ( $\alpha$  は定数,  $n \geq 1$ ).
- ⑤  $(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$  ( $n \geq 1$ ).

## 要点 2

### 1°. テイラー 有限 Taylor 展開

$f(x)$  が  $a$  を含む開区間  $I$  で  $N$  回微分可能なとき, 各  $x \in I$  に対して,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(a + \theta(x-a))}{N!} (x-a)^N$$

$N$  次の剰余項

を満たす  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) が存在する. 特に,  $a = 0$  の場合を有限 マクローリン Maclaurin 展開という.

### 2°. 基本的な関数の有限 マクローリン Maclaurin 展開

- ①  $e^x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + R_N(x)$ .
- ②  $\cos x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x)$ ,    ③  $\sin x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x)$ .
- ④  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n + R_N(x)$ ,    ⑤  $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_N(x)$  ( $x > -1$ ).

【演習中に扱う予定の問題】： 3(1)(3)(5)(6), 4(2)(3), 7(0)(1)

1  $\mathbb{R}$  上の関数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$  の導関数を求め、 $C^1$  級かどうかを調べよ。

2 (1) 開区間  $I$  上の  $C^2$  級関数  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  が与えられたとき、 $\varphi'(t) \neq 0$  ( $t \in I$ ) であれば、 $y$  は  $x$  の  $C^2$  級関数となる。このとき、 $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を  $t$  の関数として表せば、次の式が得られる。これを示せ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\{\varphi'(t)\}^3}.$$

(2) 曲線  $x = \varphi(t) = \sinh t$ ,  $y = \psi(t) = \cosh t$  上の点  $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$  において、 $\frac{dy}{dx}$  および  $\frac{d^2y}{dx^2}$  の値を求めよ。

3 次の各関数  $y = y(x)$  について、 $n$  次導関数  $y^{(n)}$  を求めよ (演習書 問題 3.2.5 類題)。

(0) 要点 1 の 3° を確認せよ。 (1)  $y = f(ax + b)$  ( $f$  は  $C^\infty$  級,  $a, b$  は定数で  $a \neq 0$ )

(2)  $y = \log \sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}$  (3)  $y = \cos^2 x$  ( $\cos 2x$  で表す) (4)  $y = \frac{1}{1-2x-3x^2}$  (部分分数分解)

(5)  $y = x^3 e^{-2x}$  (ライプニッツの公式) (6)  $y = e^x \sin x$  (まず  $y'$  を三角関数の合成で整理)

(7)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  (2 重階乗を用いて表せ) 但し、 $n$  の 2 重階乗  $n!!$  は

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots n & (n \text{ 以下の奇数の積}) & \text{if } n \geq 1: \text{奇数} \\ 2 \cdot 4 \cdots n & (n \text{ 以下の偶数の積}) & \text{if } n \geq 2: \text{偶数} \end{cases} \quad \text{および} \quad (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される。従って、例えば  $n! = (n-1)!! \cdot n!!$ ,  $(2n)!! = 2^n n!$  ( $n \geq 0$ ) が成り立つ。

4 (演習書 問題 3.2.7 類題) 次の各関数  $f(x)$  に対して、 $f^{(n)}(0)$  を計算し、有限マクローリン展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N \quad (0 < \theta < 1)$$

$\theta$  は  $x, N$  に依存

を求めよ。更に、 $N = 6$  ( $M = 3$ ) のとき、剰余項以外の部分を (記号  $\sum$  を使わず) 具体的に書け。

(0) 要点 2 の 2° を確認せよ。 (1)  $f(x) = \frac{1}{1-2x-3x^2}$  (2)  $f(x) = e^x \sin x$

(3)  $f(x) = \cosh x$  (4)  $f(x) = \sinh x$  ((3) は要点 2 の 2° の ② の形, (4) は ③ の形に)

5  $f(x) = x^3 \sin x$  の  $n$  次導関数  $f^{(n)}(x)$  は

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + q_n(x) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (p_n(x), q_n(x) \text{ は } x \text{ の整式})$$

の形に表される。  $p_n(x)$ ,  $q_n(x)$  を求めよ。 (ライプニッツの公式と  $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$  を用いる)

6 関数  $x^p$ ,  $\frac{1}{x^p}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) に対して、 $x = 1$  における有限 Taylor 展開を  $N$  次 ( $N > p$ ) の剰余項  $R_N(x)$  まです求めよ。

7

$f(x)$  が  $0$  を含む開区間  $I$  で  $C^\infty$  級るとき, 任意の自然数  $N$  に対して  $f(x)$  は [4] で述べた形の有限マクローリン展開をもつ. そこに現れる  $x^n$  の係数  $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  について以下の問いに答えよ.

- (0)  $f(x)$  が奇関数 (すなわち  $f(-x) = -f(x)$ ) のとき  $a_{2m} = 0$  となることを示せ. また,  $f(x)$  が偶関数 (すなわち  $f(-x) = f(x)$ ) のとき  $a_{2m+1} = 0$  となることを示せ.

以下の関数  $f(x)$  は両方とも奇関数なので  $f^{(2m)}(0) = a_{2m} = 0$  ( $m \geq 0$ ) が成り立つことに注意する.

- (1)  $f(x) = \sin^{-1} x$  ( $-1 < x < 1$ ) のとき, ①  $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$  を示せ. ② この両辺を  $n$  回微分して次式を示せ:  $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$  ( $n \geq 0$ ).

③  $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$  ( $m \geq 0$ ) を示せ. ④  $a_{2m+1}$  ( $m \geq 0$ ) を求めよ. (例題 3.10 参照)

- (2)  $f(x) = \tan x$  に対して, ①  $f'(x) = 1 + f(x)^2$  を確認せよ. ② 前式の両辺を  $n$  回微分して  $f^{(n+1)}(x)$  を  $f^{(j)}(x)$  ( $0 \leq j \leq n$ ) で表せ. ③  $f^{(2m+1)}(0)$  を  $f^{(2k+1)}(0)$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ) で表せ. ④  $a_{2m+1}$  を  $a_{2k+1}$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ) で表せ. ⑤  $a_1, a_3, a_5, a_7$  を求めよ.

### 演習第 7 回 レポート問題

- (1) 次の関数の  $n$  階導関数を求めよ.

$$(i) f(x) = \frac{1}{3-2x} \quad (ii) f(x) = x(x+1)e^{-2x}$$

- (2) (1) の結果を利用して (i), (ii) の  $f(x)$  について 4 次までのマクローリン展開を求めよ. さらに, 直接微分することで  $f(x) = \log(1+x^2)$  の 4 次までのマクローリン展開を求めよ. いずれも剰余項は求めなくてよい.