

数学演習第一 (演習第 8 回)

線形：正則行列，逆行列，2 次または 3 次の行列式

2025 年 6 月 25 日

要点

- I. n 次正方行列 A に対して $AB = BA = E_n$ (E_n は n 次単位行列) を満たす行列 B が存在するとき， A を**正則行列** または A は**正則である** といい， B を A の**逆行列** という。
- II. 正則行列 A に対して， A の逆行列はただ一つに定まる． A の逆行列を A^{-1} と書く．(線形教科書 p.26)
- III. n 次正方行列 A, B が $AB = E_n$ を満たせば， A と B はともに正則で互いに逆行列．(線形教科書 p.59)
- IV. 2 次正方行列の場合は， $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則 $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. このとき， A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- V. n 次正方行列 A に対して， $[A \ E_n]$ の(行基本変形による)簡約行列が $[E_n \ B]$ となるならば， A は正則であり $B = A^{-1}$ である． $[A \ E_n]$ の簡約行列の左側の行列(これは A の簡約行列に一致する)が E_n にならないとき， A は正則でない．(線形教科書 pp.59–61) 特に，

$$A \text{ が正則} \iff \text{rank } A = n$$

- VI. 2 次正方行列，3 次正方行列の行列式はそれぞれ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

となる．(線形教科書 p.66)

- VII. 平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積は $|\mathbf{a} \ \mathbf{b}|$ (行列式) の絶対値，空間ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ の作る平行六面体の体積は $|\mathbf{p} \ \mathbf{q} \ \mathbf{r}|$ (行列式) の絶対値で与えられる．(線形教科書 pp.85–86) $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ の作る四面体の体積は，平行六面体の体積の $1/6$ 倍になる．

例. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ のとき， $[A \ E_3]$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3}-3\times\textcircled{1}]{\textcircled{2}+4\times\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{2}\leftrightarrow\textcircled{3}]{-1\times\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3}-2\times\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{2}+2\times\textcircled{3}]{\textcircled{1}+\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ となるので，V より } A \text{ は正則}$$

であり，逆行列は $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

【演習中に扱う予定の問題】： $\boxed{2}(2)(3)(5), \boxed{5}(1)(2), \boxed{6}(1), \boxed{7}(2)(4)$

1 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とする.

- (1) $|A|$ を求めよ.
- (2) $A\tilde{A}$ を計算せよ.
- (3) (2) の結果を用いて, $|A| \neq 0$ のとき A は正則行列であることを示し, A^{-1} を求めよ.
- (4) $|AB| = |A||B|$ を示せ. (ヒント: 両辺をそれぞれ計算する)
- (5) $|A| \neq 0$ と A が正則であることは同値であることを示せ. (ヒント: 1 と (4) を使う)

2 以下の行列が正則かどうか調べよ. さらに, 正則であれば逆行列を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} e^x & -1 \\ 0 & e^y \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3 2×2 行列 A, B に対して, 以下の (1) ~ (5) は成り立つか? 成り立つ場合は証明し, 成り立たない場合は反例 (成り立たない行列の具体例) をあげよ. ただし, (1) において λ は実数, (5) において A は正則とする.

(1) $|\lambda A| = \lambda |A|$ (2) $|AB| = |BA|$ (3) $|A + B| = |A| + |B|$

(4) $|{}^t A| = |A|$ (5) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

4 m 次正方行列 $A, m \times n$ 行列 B に対して, $m \times (m+n)$ 行列 $[A \ B]$ に行基本変形を繰り返して $[E_m \ C]$ まで変形できれば, A は正則であり $C = A^{-1}B$ が成り立つ (各自確認すること). この事実を用いて

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して以下の問いに答えよ.

- (1) $AX = B$ を満たす 3 次正方行列 X を求めよ.
- (2) $YA = B$ を満たす 3 次正方行列 Y を求めよ. (ヒント: 転置をとる)

5 以下の行列式を求めよ. ただし, (2) については因数分解された形で答えよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 4 & 5 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$

- 6 正方行列 A が ${}^tAA = E$ を満たすとき, A を直交行列という. III より直交行列は正則行列であり, $A^{-1} = {}^tA$ となることに注意せよ.

(1) $P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ. さらに, P の逆行列を求めよ.

(2) $Q = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ. さらに, Q の逆行列を求めよ.

(3) 5 (3) の行列を R とする. $r \sin \theta \neq 0$ とき, tR の逆行列を求めよ. (ヒント: まず R を Q とある対角行列 D の積で表す)

- 7 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ および空間ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る三角形の面積 T を求めよ.

(3) $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ の作る平行六面体の体積 V を求めよ.

(4) $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ の作る四面体の体積 W を求めよ.

演習第 8 回 レポート問題

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & k & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ とする.

(i) A の行列式を求め, A が正則となるための k の条件を求めよ.

(ii) $k = -1$ のとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$ を因数分解された形で求めよ.