

# 数学演習第一 (演習 第9回)

## 微積：漸近展開, 積分の計算 (1)

2025 年 7 月 2 日

### ランダウの記号 (微積教科書 p.49 参照)

関数  $f(x)$  が  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$  を満たすとき,  $f(x) = o(x^n)$  ( $x \rightarrow 0$ ) と表す.  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対して,

$$x^m o(x^n) = o(x^{m+n}), \quad o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n}), \quad o(x^{m+n}) = x^m o(x^n),$$

$$m \leq n \text{ なら } o(x^m) + o(x^n) = o(x^m) \quad (x \rightarrow 0)$$

が成り立つ (微積教科書 p.50 定理 2.4.4 参照). 但し, ランダウの記号を含む等式は「左辺を右辺で評価する評価式」であることに注意. 例えば,  $o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n})$  ( $x \rightarrow 0$ ) は次を意味する:

$$f(x) = o(x^m), \quad g(x) = o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \quad \Rightarrow \quad f(x)g(x) = o(x^{n+m}) \quad (x \rightarrow 0).$$

### 漸近展開の要点

◎空欄の中に適当な数式を記入し, 今回の演習で必要となる予備知識を確認せよ.

$x = 0$  の周りで定義された関数  $f(x)$  がランダウの記号を用いて,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N + o(x^N) \quad (x \rightarrow 0)$$

の形に表されるとき, この右辺を  $f(x)$  の  $x \rightarrow 0$  における  $N$  次の漸近展開という. このとき, 右辺の係数  $a_0, a_1, \dots, a_N$  は一意に定まり,  $f(x)$  が  $C^N$  級ならば  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) で与えられる (微積教科書 定理 2.4.5). 以下に挙げる  $x \rightarrow 0$  における漸近展開は最も基本的かつ重要な例である.

$$(a) \quad e^x = \sum_{n=0}^N \boxed{\phantom{00000}} x^n + o(x^N).$$

$$(b) \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \boxed{\phantom{00000}} x^{2n} + o(x^N), \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \boxed{\phantom{00000}} x^{2n+1} + o(x^N).$$

記号  $\lfloor a \rfloor$  は  $a$  以下の最大整数を表す (例えば, 自然数  $N$  に対し  $N_1 = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$  は  $2N_1 + 1 \leq N$  を満たす最大整数). 一般に, 偶関数なら奇数次の項が消え, 奇関数なら偶数次の項が消える.

$$(c) \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^N \boxed{\phantom{00000}} x^n + o(x^N).$$

$$(d) \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^N \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^N). \quad \text{但し, } \binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \boxed{\phantom{00000}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\text{特に, } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^N \boxed{\phantom{00000}} x^n + o(x^N) \quad (\text{微積教科書 p.46 問題 2.3 1(3), p.151 例題 6.2.1 参照}).$$

(a)~(d) の関数を用いて表現される関数であっても, より複雑な関数  $f(x)$  に対しては, 一般に  $f^{(n)}(0)$  を直接計算するのは手が掛かる. しかし,  $f^{(n)}(0)$  を直接計算しなくても, (a)~(d) の漸近展開を組み合わせることで  $x \rightarrow 0$  における漸近展開が得られることがよくある (次の **例題** 参照).

**例題** 上記の漸近展開を利用して、 $x \rightarrow 0$  における  $\frac{1}{\cos x}$ ,  $\tan x$ ,  $\log(\cos x)$  の 5 次の漸近展開を求めよ。

**【解】** まず、(b) より  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$ ,  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$ .

•  $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5))}$  と  $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$  ( $X \rightarrow 0$ ) から、

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

《別法》  $\frac{1}{\cos x} = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^5)$  の形に漸近展開される (偶関数).  $1 = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}$  より、

$$1 = \left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) = a_0 + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24}\right)x^4 + o(x^5).$$

係数を比較して、 $a_0 = 1$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_4 = \frac{5}{24}$ .

•  $\tan x = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ .

《別法》  $\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$  の形に漸近展開される (奇関数).  $\sin x = \tan x \cos x$  より、

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) &= \left(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &= a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right)x^3 + \left(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24}\right)x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

係数を比較して、 $a_1 = 1$ ,  $a_3 = \frac{1}{3}$ ,  $a_5 = \frac{2}{15}$ .

•  $\log(\cos x) = \log\left(1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\right)$  と  $\log(1+X) = X - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)$  ( $X \rightarrow 0$ ) から、

$$\log(\cos x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(x^5) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5).$$

《別法》  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$  より、 $\int_0^x o(t^4) dt = o(x^5)$  に注意して、

$$\log(\cos x) = -\int_0^x \tan t dt = -\int_0^x \left(t + \frac{1}{3}t^3 + o(t^4)\right) dt = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5).$$

**【演習中に扱う予定の問題】** : 1(3)(8)(10)(12)(14), 2(1)(2)

## 1 (漸近展開)

次の関数  $f(x)$  の  $x = 0$  における漸近展開  $f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + o(x^N)$  ( $x \rightarrow 0$ ) を指定された次数  $N$  まで求めよ. ただし、 $\int_0^x o(t^n) dt = o(x^{n+1})$  ( $x \rightarrow 0$ ) を用いてよい.

(1)  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  ( $N=2$ )    (2)  $\sqrt{1+x}$  ( $N=2$ )    (3)  $\cosh x, \sinh x$  ( $N=5$ )    (4)  $3^x$  ( $N=2$ )

(5)  $\log(2+x)$  ( $N=2$ )    (6)  $\frac{1}{1-x-2x^2}$  ( $N=3$ )    (7)  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$  ( $N=4$ )

(8)  $e^{-x} \cos x$  ( $N=3$ )    (9)  $\frac{x}{\sin x}$  ( $N=4$ )    (10)  $e^{\cos x}$  ( $N=4$ )

(11)  $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left( = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} \right)$  ( $N=5$ )    (12)  $\tan^{-1} x \left( = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \right)$  ( $N=5$ )

(13)  $\log(x + \sqrt{1+x^2}) \left( = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \right)$  ( $N=5$ )    (14)  $\sin^{-1} x \left( = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right)$  ( $N=5$ )

**【注意】** (11) は  $\frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x))$  と変形して漸近展開を求めるのが普通のやり方. (9), (10) 以外は  $a_n$  が  $n$  の式で表されるので、余力のある人は実際に求めてみよう ((1), (2), (13), (14) では 2 重階乗が現れる). なお、偶関数なら  $2N$  次、奇関数なら  $2N+1$  次の漸近展開の形で考えるのが自然.

## 2 (漸近展開の応用)

(1) 漸近展開を利用して次の極限値を求めよ.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x(x - \sin x)} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\tanh x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(2)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  の  $n \rightarrow \infty$  における漸近展開  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  を求めよ.

(ヒント:  $\frac{1}{n} = x$  とおき,  $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(1+x)}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$  の  $x \rightarrow 0$  での漸近展開を考えよ.)

## 3 (高校程度の積分計算の復習)

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ.

$$(i) \int \frac{dx}{x(x^2+1)} \quad (ii) \int (\log x)^2 dx \quad (iii) \int x^3 e^{-x^2} dx \\ (iv) \int \frac{dx}{\sin x} \quad (v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \quad (vi) \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx \\ (vii) \int_0^{\pi} |\sin x + \cos x| dx \quad (viii) \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in \mathbb{N}_0 : 0 \text{ 以上の整数})$$

(2)  $\mathbb{R}$  上の連続関数  $f(x)$  に対して, 次の問いに答えよ.

(i) 極限値  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t) dt$  を求めよ. (まず, 積分箇所を  $f(x)$  の不定積分  $F(x)$  で表せ.)

(ii) 関数  $G(x) = \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$  の3次導関数  $G'''(x)$  を求めよ.

---

### 演習第9回 レポート問題

(1) 次の関数の  $x=0$  のまわりでの漸近展開を指定された次数まで求めよ.

$$(i) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} \text{ (6次)} \quad (ii) f(x) = \log(1 + \log(1+x)) \text{ (4次)}$$

(2)  $x=0$  のまわりでの漸近展開を用いて次の極限値を求めよ.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{\sin^{-1}(2x)} - \frac{1}{2x \cos x} \right\} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x \cosh x}{(\tan^{-1} x)^3}$$