

数学演習第一・中間統一試験【解説】

2026 年 6 月 17 日実施 ・ 試験時間 90 分

1 逆三角関数について、次の問いに答えよ。

(1) $\text{Cos}^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{7}\right)$ の値を求めよ。

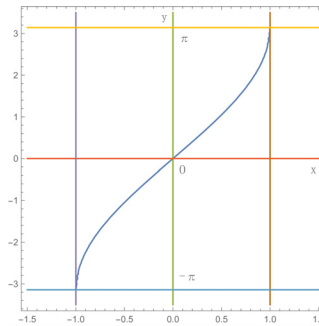
【解答】 $\sin \frac{5\pi}{7} = \cos\left(\frac{5\pi}{7} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{14}, \frac{3\pi}{14} \in [0, \pi]$ より, $\text{Cos}^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{7}\right) = \boxed{\frac{3\pi}{14}}$.

(2) 方程式 $\text{Sin}^{-1} x + 2 \text{Cos}^{-1} \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$ を解け。

【解答】 $\alpha = \text{Cos}^{-1} \frac{3}{5}$ とおけば, $\cos \alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるが, さらに $\frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ より, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ なので, $\text{Sin}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ であるから, 解 x は確かに存在し, $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \boxed{-\frac{7}{25}}$ で与えられる。

(3) $y = \text{Cos}^{-1}(-x) - \text{Cos}^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフの概形を解答欄に図示せよ (グラフの凹凸がわかるようにえがくこと)。ただし、値域が読み取れるように座標軸に必要な数値を書き入れよ。

【解答】



上図の青色曲線部分が $y = \text{Cos}^{-1}(-x) - \text{Cos}^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフとなる。 $y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$) から y は区間 $[-1, 1]$ において単調増加である。或いは, $\text{Sin}^{-1} x + \text{Cos}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ($|x| \leq 1$) より, $y = 2 \text{Sin}^{-1} x$ なので, y の $[-1, 1]$ における単調増加性はわかる。 $x = -1$ のとき, $y = -\pi$ で, $x = 1$ のとき, $y = \pi$ なので, 2つの端点 $(-1, -\pi), (1, \pi)$ を含む。 $y'' = \frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ($|x| < 1$) より, このグラフは $x < 0$ で上に凸, $x > 0$ で下に凸であり, 原点 $O(0,0)$ はこのグラフの変曲点である。この関数の値域は区間 $[-\pi, \pi]$ である。この関数は $\text{Cos}^{-1} x$ が偶関数でないことを示している。

2 次の極限値を求めよ。ロピタルの定理を用いた箇所を $\star$ で表す。

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - \tan x}$

【解答】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - \tan x} \stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cos^2 x}{\cos^3 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cos^2 x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x (\cos^2 x + \cos x + 1)} = \boxed{-2}.$$

【別解】

$$\frac{x^3}{\sin x - \tan x} = -\frac{x^3}{\sin^3 x} (\cos x + 1) \cos x \rightarrow \boxed{-2} \quad (x \rightarrow 0).$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log_e \left(\frac{ex+1}{ex-1} \right)$$

【解答】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log_e \left(\frac{ex+1}{ex-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(e+x) - \log(e-x)}{x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{e+x} + \frac{1}{e-x} \right) = \boxed{\frac{2}{e}}.$$

【別解】 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ を用いてもよい。つまり

$$\frac{\log(e+x) - \log(e-x)}{x} = \frac{e^{-1} \log(1+e^{-1}x)}{e^{-1}x} + \frac{e^{-1} \log(1-e^{-1}x)}{-e^{-1}x} \rightarrow \boxed{\frac{2}{e}} \quad (x \rightarrow +0).$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

【解答】 $y = \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ とおく。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin^{-1} x) - \log x}{x^2} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x}{2x^2 \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}}{4x \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x - \frac{2x^3 \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(1-x^2) - 2x^2 + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sin^{-1} x}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^{-1} x} = 1$ であることを用いた。よって, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} y = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \log y} = \boxed{e^{\frac{1}{6}}}$ 。

【別解】 $x = \sin t$ とおいて, 三角関数の極限値に帰着させて求める方が見通しはよい。つまり $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^{\frac{1}{\sin^2 t}}$ を計算するため, $y = \left(\frac{t}{\sin t} \right)^{\frac{1}{\sin^2 t}}$ とおく。

$$\lim_{t \rightarrow 0} \log y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log t - \log(\sin t)}{\sin^2 t} \stackrel{*}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t}}{2 \sin t \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - t}{2t \sin^2 t}.$$

ここで, $\frac{\tan t - t}{2t \sin^2 t} = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^2 \frac{\tan t - t}{t^3}$ と分解し, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - t}{t^3}$ を計算すればよい。実際, それは容易で

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - t}{t^3} \stackrel{*}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}$$

よって, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} y = e^{\frac{1}{3}} = \boxed{e^{\frac{1}{3}}}$ 。

3 関数の導関数, 微分係数について, 次の問いに答えよ。

(7) 関数 $f(x) = \cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$ に対する微分係数 $f' \left(-\frac{3}{5} \right)$ を求めよ。

【解答】 $y = 1 - x^2$, $z = \sqrt{y}$, $w = \cos^{-1} z$ で合成した関数 w の導関数 $\frac{dw}{dx}$ を計算して。

$$f'(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x| \sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq 0)$$

を得る。よって, $f' \left(-\frac{3}{5} \right) = \boxed{-\frac{5}{4}}$ 。

(8) 関数 $y = \frac{1}{\sin x}$ ($0 < |x| < \frac{\pi}{2}$) の逆関数 $x = \varphi(y)$ に対して, $\varphi' \left(\frac{5}{4} \right)$ を求めよ。

【解答】 $\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 。ここで, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ より, $0 \neq \sin x < 1$, $\cos x > 0$ に注意して, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin^2 x} = -|y| \sqrt{y^2 - 1}$ なので, $\varphi'(y) = -\frac{1}{|y| \sqrt{y^2 - 1}}$ がわかる。特に $\varphi' \left(\frac{5}{4} \right) = -\frac{4}{5} \frac{4}{3} = \boxed{-\frac{16}{15}}$ 。

(9) 関数 $y = \tan^{-1}(\sinh x)$ の逆関数 $x = \psi(y)$ に対して, $\psi'(\frac{\pi}{3})$ を求めよ.

【解答】 (8) と同様に, $\psi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ を適用するので, $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ より, $\frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x}{1 + (\sinh x)^2} = \frac{1}{\cosh x}$ を計算して, $\cosh x$ を y の式で表す. そこで, $\sinh x = \tan y$, $|y| < \frac{\pi}{2}$ から, 結局 $\psi'(y) = \cosh x = \sqrt{1 + (\sinh x)^2} = \sqrt{1 + (\tan y)^2} = \frac{1}{\cos y}$ を得る. 特に $\psi'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \boxed{2}$.

4 (10) 関数 $f(x) = \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{|x| + 2}$ の極値をすべて求めよ.

【解答】 導関数は次で与えられる:

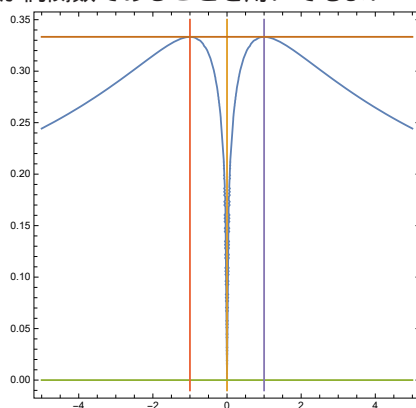
$$\begin{aligned} \bullet x > 0 \text{ のとき, } f'(x) &= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}(x+2)} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^2} = \frac{2(1-x)}{3x^{\frac{2}{3}}(x+2)}, \\ \bullet x < 0 \text{ のとき, } f'(x) &= -\frac{1}{3(-x)^{\frac{2}{3}}(-x+2)} + \frac{(-x)^{\frac{1}{3}}}{(-x+2)^2} = \frac{-2(1+x)}{3(-x)^{\frac{2}{3}}(-x+2)}. \end{aligned}$$

これより, $f(x)$ の増減は次の通り:

x	$-\infty$	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	∞
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	0

一方, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないが, $0 < |x| < 1$ のとき, $f(x) > 0 = f(0)$ をみたま. よって, $f(x)$ は $x = \pm 1$ で極大値 $\frac{1}{3}$, $x = 0$ で極小値 0 をとる.

注 $x > 0$ での増減を調べて, $f(x)$ が偶関数であることを用いてもよい.



5 空間内の3点 $P(1, 3, 5)$, $Q(1, -2, -1)$, $R(3, 4, 6)$ について, 次の問いに答えよ.

(11) 点 R を通り, 直線 PQ と垂直に交わる直線の方程式を求めよ.

【解答】 $\vec{n} := \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix}$ は平面 PQR の1つの法線ベクトルであるから, 求める

直線は $\vec{n}, \overrightarrow{PQ}$ の両方と垂直である. よって, $\vec{n} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ が1つの方向ベクトル

であり, 求める方程式は $\frac{x-3}{122} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-6}{-5}$.

【別解】 点 R から直線 PQ に垂線 RS を下ろす. S は直線 PQ 上の点であるから $S(1, 3-5t, 5-6t)$ とおける. このとき, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{RS}$ であるから,

$$0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-3 \\ (3-5t)-4 \\ (5-6t)-6 \end{bmatrix} = -5(-5t-1) - 6(-6t-1) = 61t + 11.$$

よって、 $t = -\frac{11}{61}$ と定まり、 $S\left(1, \frac{238}{61}, \frac{371}{61}\right)$. これより、 $\overrightarrow{RS} = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{6}{61} \\ \frac{5}{61} \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 122 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ が求める直線の方方向ベクトルである.

(12) 3つのベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ で決まる平行六面体の体積を求めよ. ただし, O は原点を表す.

【解答】 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ で決まる平行六面体の体積は

$$\left| (\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OR} \right| = \left| \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right| = \boxed{15}.$$

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ および $M = [A \ B]$ について, 次の問いに答えよ.

(13) tMM の第3行の行ベクトルを求めよ.

【解答】 ${}^tMM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -8 & 5 \\ -3 & -8 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ より, tMM の第3行の行ベクトルは $\boxed{[-3 \ -8 \ 5 \ -3]}$.

(14) $A^{-1}XA = B^{-1}$ をみたす行列 X を求めよ.

【解答】 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ より,

$$X = AB^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 15 & -19 \\ 11 & -14 \end{bmatrix}}.$$

【別解】 $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ から

$$X = A(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 15 & -19 \\ 11 & -14 \end{bmatrix}}.$$

7 (15) 4つのベクトル $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$ が1次独立であるための成分 k の条件を求めよ.

【解答】 1次関係式 $c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4 = 0$ を考える. これは c_1, c_2, c_3, c_4 を変数とする連立1次方程式

式 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と看做せる. そこで, この係数行列を簡約化して,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & k+2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & k+2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

a_1, a_2, a_3, a_4 が1次独立であることは, 自明解 $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 0)$ しか存在しないことと同値なので, 求める k の条件は $\boxed{k \neq -2}$.

8

(16) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ の階数が 2 以下であるような成分 c の値をすべて求めよ.

【解答】 $\begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1-c^2 & 1-c \\ 0 & 1-c & c-1 \end{bmatrix}$ と基本変形する. $c = 1$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1-c^2 & 1-c \\ 0 & 1-c & c-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ になるので, このときの階数は 1 である. $c \neq 1$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1-c^2 & 1-c \\ 0 & 1-c & c-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1+c & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1+c & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+c \end{bmatrix}$ である. よって, $c = -2$ のときの階数は 2 となり, $c \neq -2, 1$ のときの階数は 3 となる. 以上より, 与えられた行列の階数が 2 以下のとき, 求める成分 c の値は $\boxed{1, -2}$.

9

連立 1 次方程式に関する以下の問いに答えよ. ただし, (18), (20) において解が任意定数を含む場合は, 任意定数の選び方は標準的な方法, 即ち線形代数の指定教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え. また, 任意定数の文字は $s, t, \dots$ をこの順で用いよ.

(17) 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 \quad \quad - 4x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 13 \end{cases}$$
 の拡大係数行列の階数を求めよ.

【解答】 拡大係数行列を行基本変形して,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, 拡大係数行列の階数は $\boxed{2}$.

(18) (17) の同次連立 1 次方程式を解け.

【解答】 (17) の結果より, (17) の同次連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = -2 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$ と同値となる. ここで, “主成分に対応しない変数” x_3, x_4 を任意定数にとり, $x_3 = s, x_4 = t$ において, 任意の解は

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 4s - t \\ x_2 = 5 - 3s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数})$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).

(19) 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + dx_2 + 6x_3 = 9 \end{cases}$$
 がただ 1 つの解をもつような係数 d の条件を求めよ.

【解答】 拡大係数行列を行基本変形して, $d \neq 6$ ならば

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & d & 6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & d-6 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{d-6} & \frac{-3}{d-6} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

よって,

- $d = 6$ のとき: 係数行列の階数が 2, 拡大係数行列の階数が 3 となり解は存在しない.
- $d \neq 6$ のとき: 係数行列の階数も拡大係数行列の階数も 3 となり解はただ 1 つ存在する.

以上より, 求める k の条件は $\boxed{d \neq 6}$.

(20) d が (19) で求めた条件をみたすとき, (19) の連立 1 次方程式を解け.

【解答】 拡大係数行列を行基本変形して得られる簡約行列は $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3(d-4)}{d-6} & \frac{2(2d-9)}{d-6} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{d-6} & \frac{-3}{d-6} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$ となる. よって,

(19) の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 &= \frac{2(2d-9)}{d-6} - \frac{2 \cdot 3(d-4)}{d-6} \\ x_2 &= \frac{-3}{d-6} - \frac{2(-3)}{d-6} \\ x_3 &= 2 \end{cases}$ と同値となる. ただ 1 つの解は

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2(3-d)}{d-6} \\ x_2 = \frac{3}{d-6} \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(3-d)}{d-6} \\ \frac{3}{d-6} \\ 2 \end{bmatrix}$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).