

数学演習第一・中間統一試験【問題用紙】

2026 年 6 月 17 日実施 ・ 試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

1 逆三角関数について、次の問いに答えよ.

(1) $\text{Cos}^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{7}\right)$ の値を求めよ.

(2) 方程式 $\text{Sin}^{-1} x + 2 \text{Cos}^{-1} \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$ を解け.

(3) $y = \text{Cos}^{-1}(-x) - \text{Cos}^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフの概形を解答欄に図示せよ (グラフの凹凸がわかるようにえがくこと). ただし, 値域が読み取れるように座標軸に必要な数値を書き入れよ.

2 次の極限值を求めよ.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - \tan x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log_e \left(\frac{ex + 1}{ex - 1} \right)$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sin}^{-1} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

3 関数の導関数, 微分係数について、次の問いに答えよ.

(7) 関数 $f(x) = \text{Cos}^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ に対する微分係数 $f'\left(-\frac{3}{5}\right)$ を求めよ.

(8) 関数 $y = \frac{1}{\sin x}$ ($0 < |x| < \frac{\pi}{2}$) の逆関数 $x = \varphi(y)$ に対して, $\varphi'\left(\frac{5}{4}\right)$ を求めよ.

(9) 関数 $y = \text{Tan}^{-1}(\sinh x)$ の逆関数 $x = \psi(y)$ に対して, $\psi'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ を求めよ. ただし, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ とする.

4 (10) 関数 $f(x) = \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{|x| + 2}$ の極値をすべて求めよ. ただし, それぞれの極値 b について, 「 $x = a$ で極大値 (or 極小値) b 」という形で答えよ.

5 空間内の3点 $P(1, 3, 5)$, $Q(1, -2, -1)$, $R(3, 4, 6)$ について, 次の問いに答えよ.

(11) 点 R を通り, 直線 PQ と垂直に交わる直線の方程式を求めよ.

(12) 3つのベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ で決まる平行六面体の体積を求めよ. ただし, O は原点を表す.

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ および $M = [A \ B]$ について, 次の問いに答えよ.

(13) tMM の第3行の行ベクトルを求めよ. ただし, tM は M の転置行列を表す.

(14) $A^{-1}XA = B^{-1}$ をみたす行列 X を求めよ.

7 (15) 4つのベクトル $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$ が1次独立であるための成分 k の条件を求めよ.

8 (16) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ の階数が2以下であるような成分 c の値をすべて求めよ.

9 連立1次方程式に関する以下の問いに答えよ. ただし, (18), (20)において解が任意定数を含む場合は, 任意定数の選び方は標準的な方法, 即ち線形代数の指定教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え. また, 任意定数の文字は $s, t, \dots$ をこの順で用いよ.

(17) 連立1次方程式
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 \quad \quad - 4x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 13 \end{cases}$$
 の拡大係数行列の階数を求めよ.

(18) (17)の連立1次方程式を解け.

(19) 連立1次方程式
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + dx_2 + 6x_3 = 9 \end{cases}$$
 がただ1つの解をもつような係数 d の条件を求めよ.

(20) d が (19) で求めた条件をみたすとき, (19)の連立1次方程式を解け.