

数学演習第一（演習第 1 回）【解答例】

微積：極限值, 逆三角関数 (2026 年 4 月 22 日実施)

演習問題

1 (2) $\frac{\sin ax - \sin bx}{x} = \frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin bx}{x} = \frac{\sin ax}{ax} \cdot a - \frac{\sin bx}{bx} \cdot b \rightarrow \boxed{a - b} \quad (x \rightarrow 0)$

(6) $y = x - \frac{\pi}{3}$ とおくと, $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ のとき $y \rightarrow 0$. このとき, $\frac{\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin(y + \frac{\pi}{2}) - 1}{y} = \frac{\cos y - 1}{y} = \frac{(1 - \cos y)(1 + \cos y)}{y(1 + \cos y)} = \frac{-\sin^2 y}{y(1 + \cos y)} = \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \frac{-y}{1 + \cos y} \rightarrow 1 \cdot 0 = \boxed{0} \quad (x \rightarrow 0)$.

(7) $\frac{1 - \cos x}{x \tan x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x}{x} \frac{\cos x}{1 + \cos x} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}} \quad (x \rightarrow 0)$.

【注】 (6), (7) の解答例では, $1 - \cos x$ を $1 - \cos x = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ と変形したが, 半角の公式を用いて $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ と変形する方法もよく用いられる. この変形から容易に得られる極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ は基本的.

(8) $x \rightarrow 0$ のとき, $\sin x \rightarrow 0$ であるから, $\frac{\tan(\sin x)}{\tan x} = \frac{\sin(\sin x) \cos x}{\cos(\sin x) \sin x} = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \frac{\cos x}{\cos(\sin x)} \rightarrow \boxed{1} \quad (x \rightarrow 0)$.

【別法】 $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x \rightarrow 1$ を用いて, $\frac{\tan(\sin x)}{\tan x} = \frac{\tan(\sin x)}{\sin x} \frac{x}{\tan x} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

(11) $y = \frac{\pi}{2} - x$ とおくと, $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ のとき $y \rightarrow +0$. このとき, $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x = y \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{y}{\tan y} = \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y \rightarrow \boxed{1}$.

(12) 自然対数をとって考える. $y = 1 - x$ ($x = 1 - y$) とおくと, $x \rightarrow 1$ のとき $y \rightarrow 0$ であり, $\log x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{\log x}{1-x} = \frac{\log(1-y)}{y} \rightarrow -1$. よって, $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\log x^{\frac{1}{1-x}}} \rightarrow \boxed{e^{-1}} \left(= \frac{1}{e}\right)$.

(13) 自然対数をとって考える. $\cos x = 1 + (\cos x - 1)$ と分解し, (7) と同様な計算を用いて ((7) の【注】も参照), $\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad (x \rightarrow 0)$. よって, $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \boxed{e^{-1/2}} \left(= \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(14) $x \rightarrow +0$ のとき, $\sin x \rightarrow +0$, $\log(\sin x) \rightarrow -\infty$ より, $\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)} = \frac{\log(\sin 2x) - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x) - \log(\cos x)} = \frac{\log(\sin x) + \log(2 \cos x) - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x) - \log(\cos x)} = \frac{1 + \frac{\log(2 \cos x) - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x)}}{1 - \frac{\log(\cos x)}{\log(\sin x)}} \rightarrow \boxed{1}$

2 (5) $\alpha = \tan^{-1}(-2)$ とおいて, $\sin \alpha$ の値を求める. $\tan \alpha = -2$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) であるから, $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 5$. これより, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ なので, $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{5}}}$.

(6) $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)$ とおいて, $\tan \alpha$ の値を求める. $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) であるから, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{24}{25}$ となり, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. よって, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{6}/5}{-1/5} = \boxed{-2\sqrt{6}}$.

3 (1) $\alpha = \tan^{-1} 3$ とおくと, $\tan \alpha = 3 > 0$ かつ $\cos^{-1} x = \alpha$. このとき, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから, $\cos^{-1} x = \alpha$ は解をもち, $x = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ で与えられる.

(2) $\alpha = \sin^{-1} \frac{3}{4}$ とおくと, $\sin \alpha = \frac{3}{4} > 0$ かつ $\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\alpha < \frac{\pi}{2}$. よって, $\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{1}{8}$ で与えられる.

(3) $\alpha = \tan^{-1} \frac{2}{5}$ とおくと, $\tan \alpha = \frac{2}{5} \in (0, 1)$ かつ $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ であるから, $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 2\alpha < \frac{\pi}{4}$. よって, $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan 2\alpha} = \frac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha}$ で与えられる. ここで, $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{20}{21}$ であるから, $x = \frac{1 - \frac{20}{21}}{1 + \frac{20}{21}} = \frac{1}{41}$ となる.

【注】 この種の方程式は解をもたないことがある. 例えば,

- $\cos^{-1} x = \tan^{-1}(-2)$ は **3**(1) と似ているが, 解をもたない. 実際, $\tan^{-1}(-2) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ は関数 $\cos^{-1} x$ の値域 $[0, \pi]$ に含まれない.
- $\sin^{-1} x + 2 \cos^{-1}(-3/4) = \pi$ も解をもたない. なぜか?

4 (1) $\theta = \sin^{-1} x$ とおくと, $\sin \theta = x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). このとき $x = \sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ かつ $0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$ であるから, \cos^{-1} の定義により $\frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1} x$. よって, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\theta = \tan^{-1} x$ とおくと, $\tan \theta = x$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$). ここで, $x > 0$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. このとき,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

かつ $0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから, \tan^{-1} の定義により $\frac{\pi}{2} - \theta = \tan^{-1} \frac{1}{x}$. よって, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2}$.

【注】 $x < 0$ のときには, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ が成り立つ.

5 (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$.

(2) $X = e^x > 0$ とおけば,

• $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(X - \frac{1}{X}\right)$ より, $X^2 - 2yX - 1 = 0$. これを X に関する 2 次方程式とみなして, $X > 0$ なる解は $X = e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$. よって, $y = \sinh x$ の逆関数は $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

• $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{X - X^{-1}}{X + X^{-1}} = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$ より $X^2 = e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ (> 0). この X に関する 2 次方程式の $X > 0$ なる解は $X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$. よって, $y = \tanh x$ の逆関数は $x = \log \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ (あるいは $x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$).

(3) $X = e^x > 0$ とおけば, $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq 1$ となり, $X^2 - 2yX + 1 = 0$. このとき, $y \geq 1$ であるから, この X に関する 2 次方程式は実数解 $X = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$ をもつ.

• $x \geq 0$ ならば, $X = e^x \geq 1$ より, $X = y + \sqrt{y^2 - 1}$. よって, $y = \cosh x$ ($x \geq 0$) の逆関数は $x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

- $x \leq 0$ ならば, $X = e^x \in (0, 1]$ より, $X = y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}$. よって, $y = \cosh x$ ($x \leq 0$) の逆関数は $x = -\log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ (あるいは $x = \log(y - \sqrt{y^2 - 1})$).

レポート問題の解答例

- (1) $\alpha = \text{Sin}^{-1}\left(\cos \frac{5\pi}{9}\right)$ とおくと, $\sin \alpha = \cos \frac{5\pi}{9}$ を満たす $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を求めればよい. したがって,
 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{9} = \boxed{-\frac{\pi}{18}}$.
- (2) $\alpha = \text{Sin}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ をみたす $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ である. このとき, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \boxed{\frac{1}{3}}$ となる.
- (3) $\alpha = \text{Sin}^{-1} \frac{4}{5}$ とおくと, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ を満たす $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ である. とくに, $\frac{4}{5} > 0$ より, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲にあることから, $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$ であり, $\text{Tan}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ はただ一つの解 x を持つ. その x は,
 $x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$ である. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ となる $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ に対し, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ となり, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ だか
 ら, $x = \frac{1}{\tan \alpha} = \boxed{\frac{3}{4}}$ となる.