数学演習第一（演習第２回）【解答例】

線形：平面の方程式, 行列の演算 (2026 年 5 月 13 日実施)

演習問題

1 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boxed{-15}$. (2) なす角を $\theta\in[0,\pi]$ とすれば, $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\dfrac{-15}{3\cdot5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. よって, $\theta=\boxed{\dfrac{3\pi}{4}}$.

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boxed{\begin{bmatrix}11\\10\\2\end{bmatrix}}$. (4) ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積) $=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\boxed{15}$. ($\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ を計算してもよい.)

(5) ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積) $=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|11-10+2|=\boxed{3}$.

(6) 四面体の体積は平行六面体の体積に対して, 底面の面積は半分で, 更に錐となっているので体積は 1/6 となる. よって,

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ の作る四面体の体積})=\frac{1}{6}\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ の作る平行六面体の体積})=\frac{1}{6}\,|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=\frac{3}{6}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

2 (i) $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{b}''=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}''$ と $\boldsymbol{a}$ との内積をとれば, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=k\|\boldsymbol{a}\|^2$. よって, $k=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})/\|\boldsymbol{a}\|^2$ となり,

$$\boldsymbol{b}'=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}=(\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|},\quad \|\boldsymbol{b}'\|=\frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|}=\|\boldsymbol{b}\||\cos\theta|\quad (\theta\in(0,\pi)\text{ は }\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{ のなす角}).$$

(ii) (i) の結果より, $\boldsymbol{b}''=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}''=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$. また, $\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'',\boldsymbol{b}$ は直角三角形の 3 辺に重なるから,

$$\|\boldsymbol{b}''\|=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{b}'\|^2}=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2\cos^2\theta}=\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta=\frac{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{a}\|\sin\theta}{\|\boldsymbol{a}\|}=\frac{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}.$$

次に, **1** の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対して,

(7) $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}=\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}}=\boxed{\begin{bmatrix}2/3\\-2/3\\-1/3\end{bmatrix}}$.

(8) まず, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に平行な平面の法線ベクトルとして $\boldsymbol{n}:=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}11\\10\\2\end{bmatrix}$ をとる. $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{n}$ に平行な直線」への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{75}\begin{bmatrix}11\\10\\2\end{bmatrix}$. よって, $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に平行な平面」(「$\boldsymbol{n}$ に垂直な平面」) への正射影は

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{75}\begin{bmatrix}11\\10\\2\end{bmatrix}=\boxed{\frac{1}{75}\begin{bmatrix}64\\-85\\73\end{bmatrix}}=\boxed{\begin{bmatrix}64/75\\-17/15\\73/75\end{bmatrix}}.$$

3 (1) 直線 AB は点 A$(1,2,0)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, 方程式は $\boxed{x-1=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{2}}$.

(2) 平面 ABC は点 A$(1,2,0)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-5\\-8\end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, 方程式は $(x-1)-5(y-2)-8z=0$. これを整理して, $\boxed{x-5y-8z+9=0}$ (または $\boxed{x-5y-8z=-9}$).

(3) 原点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすとき, 直線 OH は原点 O を通り, 平面 ABC の法線ベクトル $\begin{bmatrix}1\\-5\\-8\end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, H$(s,\,-5s,\,-8s)$ と書ける. 更に, H は平面 ABC 上の点であるから, $s-5\cdot(-5s)-8\cdot(-8s)+9=0$ を満たす. これを解いて $s=-\dfrac{1}{10}$ となり, H の座標は $\left(-\dfrac{1}{10},\,\dfrac{1}{2},\,\dfrac{4}{5}\right)$ で,

垂線の長さは $\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\| = \dfrac{1}{10}\sqrt{1+25+64} = \boxed{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$.

【別法】 求める垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の「平面 ABC の法線」($\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行) への正射影の長さに他ならない．よって，$\boxed{\mathbf{2}}$ (i) を用いて，(垂線の長さ) $= \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})|}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\|} = \dfrac{|1-10+0|}{\sqrt{1+25+64}} = \boxed{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$.

【補足】 一般に，点 (x_1, y_1, z_1) から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の長さは $\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ で与えられる．この事実を示そう．点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ とし，平面 $ax+by+cz+d=0$ 上に点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ をとる．このとき，垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}$ の平面 $ax+by+cz+d=0$ の法線 ($\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする) への正射影の長さに他ならない．このとき，$ax_0+by_0+cz_0+d=0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} \cdot \boldsymbol{n}$ は

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0) = (ax_1+by_1+cz_1)-(ax_0+by_0+cz_0) = ax_1+by_1+cz_1+d$$

と計算される．よって，求める垂線の長さは $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(4) 点 C から直線 AB に垂線 CK を下ろすとき，点 K は直線 AB 上の点であるから，$\mathrm{K}(t+1, -3t+2, 2t)$ と書ける．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \begin{bmatrix} t+2 \\ -3t+2 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$ と直線 AB は垂直ゆえ，$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t+2 \\ -3t+2 \\ 2t-1 \end{bmatrix} = t+2-3(-3t+2)+2(2t-1) = 0$. これより $t = \dfrac{3}{7}$ が得られ，点 K の座標は $\left(\dfrac{10}{7}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{6}{7}\right)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 17 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$. よって，垂線の長さは $\|\overrightarrow{\mathrm{CK}}\| = \dfrac{1}{7}\sqrt{289+25+1} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{35}}{7}}$.

【別法】 求める垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の「直線 AB に垂直な平面」への正射影の長さに他ならない．よって，$\boxed{\mathbf{2}}$ (ii) を用いて，(垂線の長さ) $= \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|} = \dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}}} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{35}}{7}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $2A-3B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 10 & -5 & -4 \\ -4 & -9 & -5 \end{bmatrix}}$.

(2) $X = \dfrac{1}{2}(B-3A) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -8 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -4 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 2 \end{bmatrix}}$.

(3) $BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -7 & 4 & 10 \\ -5 & -1 & 10 \end{bmatrix}}$.

(4) $A\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}B = A\,{}^{\mathrm{t}}(BC) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 4 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -17 & -15 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $(A-aE)(A-dE) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = bcE$. 左辺を展開すれば $A^2-(a+d)A+adE$ であるから，確かに $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E = O$ が成り立つ．

(2) (1) の関係式より，$(ad-bc)E = (a+d)A - A^2 = A((a+d)E-A) = ((a+d)E-A)A$. よって，$\widetilde{A} = (a+d)E - A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおけば，確かに $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad-bc)E$ が成り立つ．

(3) ① $ad-bc \neq 0$ ならば，(2) の関係式の両辺を $ad-bc \neq 0$ で割り，$A\left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right) = \left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right)A = E$. 定義により $\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}$ は A の逆行列である (A は正則): $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

② $ad-bc = 0$ ならば $A\widetilde{A} = O$ となるが，このとき A が逆行列 A^{-1} をもつ (= 正則) と仮定すれば，$\widetilde{A} = (A^{-1}A)\widetilde{A} = A^{-1}(A\widetilde{A}) = A^{-1}O = O$ となり，$A = O$ が従う (成分に注目)．ところが，$A = O$ はどんな 2 次正方行列を掛けても O となるので，A が逆行列をもつという仮定に矛盾する．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて，① $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}}$, ② $\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{r}\begin{bmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}}$.

(2) $AX=BA-2B$ の両辺の左側から A^{-1} を掛けて $X=A^{-1}(BA-2B)$ を計算すればよい．

$$BA-2B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -7\\ 2 & -3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -7 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4\\ -6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

であるから，

$$X=A^{-1}(BA-2B)=\begin{bmatrix}5 & -7\\ 2 & -3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -7\\ 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}}.$$

7 (1) $(x',y')=(x,-y)$ より，$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ -y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$．すなわち，$P=\boxed{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}}$．

(2) $x'+iy'=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\sin\theta+y\cos\theta)$ より，

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\ x\sin\theta+y\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.\quad すなわち，Q_\theta=\boxed{\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}.$$

(3) ヒントにより，$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=Q_\theta\left(P\left(Q_{-\theta}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)\right)=Q_\theta PQ_{-\theta}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ が成り立つ (第 2 の等号は行列の積の結合法則による)．よって，

$$R_\theta=Q_\theta PQ_{-\theta}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta\\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}}.$$

レポート問題

(1) (i) $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\boxed{\begin{bmatrix}-5\\ 11\\ 23\end{bmatrix}}$.

(ii) ℓ_1 上の点の 1-パラメータ表示 $(5s-4,-4s+5,3s-1)$，ℓ_2 上の点の 1-パラメータ表示 $(2t+3,3t+4,-t+1)$ が一致する条件，$5s-4=2t+3,-4s+5=3t+4,3s-1=-t+1$ を解く．$t=2-3s$ を第 1 式，第 2 式に代入するといずれも $s=1$ となり，$t=-1$ となって，交点の座標は，$\boxed{(1,1,2)}$ である．

(iii) ℓ_1,ℓ_2 の方向ベクトルが $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ であることから，ℓ_1,ℓ_2 を含む平面は，外積ベクトル $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ に垂直で ℓ_1,ℓ_2 の交点を含む．よってその方程式は，$-5(x-1)+11(y-1)+23(z-2)=0$，すなわち，$\boxed{-5x+11y+23z=52}$ となる．

(2) 行列 A,B,C のサイズはそれぞれ 2×3, 3×2, 3×3 であるから，3 つの行列の積が定義できるのは ACB, CBA, BAC の 3 通り．それぞれの積を計算すると，

$$ACB=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -9 & 1\end{bmatrix}},$$

$$CBA=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}},$$

$$BAC=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-1 & 2 & -7\\ 0 & 0 & -7\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}}.$$